Programme interrogations orales n°25

Du 29 Avril au 3 Mai

Probabilités sur un univers fini

Capacités attendues

Expériences aléatoires, variables aléatoires Maîtriser le vocabulaire associé à une expérience aléatoire : issues, univers, événements, événements élémentaires, événement impossible ou certain.

Savoir définir l'événement contraire d'un événement et savoir définir les événements "A et B" et "A ou B" à partir de deux événements A et B. Maîtriser la notion d'événements incompatibles. Maîtriser la définition de système complets d'événements.

Maitriser la notion de variable aléatoire X sur un univers fini Ω ainsi que les notations $X(\Omega)$, $[X \in A]$, $[X \leqslant a]$, $[X = a]$.

Notion de probabilité Maîtriser les notions de probabilité sur un univers fini et d'espace probabilisé fini. Savoir exprimer la probabilité d'un événement contraire, d'une différence de deux événements, de la réunion de deux événements et maîtriser la propriété de croissance des probabilités.

Savoir qu'une probabilité sur un univers fini est entièrement déterminée par les images des événements élémentaires. Maîtriser la notion de distribution de probabilités sur un ensemble fini.

Maîtriser la notion de probabilité uniforme sur un univers fini et savoir exprimer la probabilité d'un événement à l'aide des cardinaux dans une situation d'équiprobabilité.

Savoir définir et déterminer la loi d'une variable aléatoire. Celle-ci est caractérisée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. Savoir définir, reconnaître et manipuler une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur un ensemble fini, une loi de Bernoulli (interprétation comme succès d'une expérience), une loi binomiale.

Probabilités conditionnelles Savoir définir la probabilité conditionnelle de A sachant B pour deux événements A et B tels que $P(B) > 0$. Savoir que P_B définit une probabilité sur l'univers.

Maîtriser la formule des probabilités composées.

Maîtriser la formule des probabilités totales dans le cas d'un système complet d'événements et dans la cas particulier $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$.

Maîtriser les formules de Bayes.

Indépendance Maîtriser les notions d'événements indépendants et de famille finie d'événements indépendants.

Savoir que l'indépendance implique l'indépendance deux à deux mais que la réciproque est fausse, ie l'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance mutuelle.

Savoir que si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B le sont et savoir étendre ce résultat au cas d'un nombre fini d'événements.

Savoir définir la notion de couple de variables aléatoires indépendantes. Celle-ci est caractérisée par les relations $P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x)P(Y = y)$. Savoir étendre cette définition à un nombre fini de variables aléatoires.

Savoir que si X_1,..., X_n sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Questions de cours

- Remarque : *La notion de variable aléatoire est introduite uniquement pour pouvoir travailler sur des événements construits en termes de variables aléatoires. Les résultats les concernant seront abordés dans un chapitre ultérieur.*

- Énoncer la caractérisation des probabilités par les images des événements élémentaires et donner la définition de la probabilité uniforme sur un univers fini.

- Donner les définitions d'une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur $X(\Omega)$, qui suit une loi de Bernoulli, qui suit une loi binomiale.

- Donner la définition de la probabilité conditionnelle $P(A|B) = P_B(A)$ et prouver que P_B est une probabilité.

- Prouver la formule des probabilités totales et énoncer les formules de Bayes.

- Donner les définitions d'événements A et B indépendants, de variables aléatoires X et Y indépendantes puis donner la loi de $X_1 + \cdots + X_n$ si X_1,..., X_n sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ (démonstration facultative).

Exercices

Les exercices pourront porter sur l'intégralité du chapitre Probabilités sur un univers fini.