Programme interrogations orales n°24

Du 8 au 12 Avril

Représentation matricielle des applications linéaires

Capacités attendues

Matrices et applications linéaires Savoir écrire la matrice d'une application linéaire dans un couple de bases et savoir en déduire les coordonnées de l'image d'un vecteur. Maîtriser l'exemple de la similitude de multiplicateur $a + ib$ dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$.

Savoir écrire la matrice d'une combinaison linéaire. Maîtriser l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}n, p(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases et savoir en déduire la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$. Savoir écrire la matrice d'une composée d'applications linéaires. Maîtriser le cas particulier des endomorphismes où le choix d'un couple de bases induit un isomorphisme d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Maîtriser le lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

Application linéaire canoniquement associée à une matrice Savoir définir l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Maîtriser les définitions de noyau, d'image et de rang d'une matrice à partir de l'application linéaire canoniquement associée. Savoir que les lignes d'une matrice donnent un système d'équations linéaires de son noyau. Savoir que les colonnes d'une matrice engendrent son image. Maîtriser l'inversibilité d'une matrice par son noyau, son image ou son rang.

Savoir que le rang d'une matrice ne change pas par multiplication, à gauche ou à droite, par une matrice inversible.

Systèmes linéaires Savoir interpréter l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène comme noyau d'une matrice et maîtriser la définition du rang d'un tel système.

Savoir exprimer la dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire homogène à l'aide de son rang.

Savoir que le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A. Dans ce cas, maîtriser la structure d'espace affine de l'espace des solutions.

Changements de bases Savoir écrire la matrice de passage d'une base à une autre, savoir exprimer la relation entre les coordonnées d'un même vecteur dans deux bases différentes. Maîtriser les formules de changement de bases dans le cas d'une application linéaire ou d'un endomorphisme.

Savoir qu'une application linéaire u est de rang r si et seulement s'il existe un couple de bases dans lequel la matrice de u est la matrice J_r.

Matrices équivalentes et rang Maîtriser la notion de matrices équivalentes et savoir interpréter cette notion par les applications linéaires. Savoir que deux matrices qui s'obtiennent l'une de l'autre par des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes sont équivalentes.

Savoir qu'une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r. Maîtriser la caractérisation des matrices équivalentes par le rang.

Savoir que $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$. Maîtriser les multiples interprétations du rang d'une matrice.

Maîtriser la notion de matrice extraite. Savoir majorer le rang des matrices extraites. Maîtriser la caractérisation du rang d'une matrice par la taille maximale des matrices carrées extraites inversibles.

Matrices semblables et trace Maîtriser la définition et les propriétés de la trace (linéarité, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, invariance par similitude).

Maîtriser la notion de matrices semblables et savoir interpréter cette notion par les endomorphismes. Savoir que deux matrices semblables ont même trace, même rang. Sur des exemples simples, savoir déterminer si deux matrices sont semblables ou non.

Maîtriser la définition de la trace d'un endomorphisme en dimension finie et ses propriétés (linéarité, $\mathrm{tr}(uv) = \mathrm{tr}(vu)$). Savoir exprimer la trace d'un projecteur.

Questions de cours

- Justifier que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 et donner la matrice dans la base $(1, i)$ de $z \mapsto (a + ib)z$.
- On note $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto XP'' + (1 - X)P' \end{cases}$. Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, la matrice D de φ dans la base $\mathcal{B} = (1, X - 1, X^2 - 4X + 2)$, la matrice de passage $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ et préciser la relation entre M, D et $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.
- Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2 tel que $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Donner la définition de matrices équivalentes, énoncer la caractérisation des matrices équivalentes par le rang et démontrer que $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Démontrer que deux matrices semblables ont la même trace et donner la définition de la trace d'un endomorphisme. Application à l'endomorphisme ψ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\psi(M) = AM$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ fixé.
- Montrer que la trace d'un projecteur est égale à son rang.

Exercices

Les exercices pourront porter sur l'intégralité du chapitre Représentation matricielle des applications linéaires. **Le déterminant n'est à ce jour pas connu.**