Programme interrogations orales n°23

Du 2 au 5 Avril

Intégration

Capacités attendues

Continuité uniforme Maîtriser la définition de fonction uniformément continue sur un segment. Savoir qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue et qu'une fonction uniformément continue est continue. Maitriser le théorème de Heine.

Fonctions en escalier et fonctions continues par morceaux Maîtriser la définition de subdivision d'un segment. Savoir écrire une subdivision régulière (ie à pas constant) d'un segment. Savoir identifier une fonction en escalier. Maîtriser la définition de fonction continue par morceaux sur un segment. Maîtriser les structures d'espace vectoriel et d'anneau de l'ensemble de ces fonctions. Savoir qu'une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment Comprendre le principe de construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Maitriser les propriétés de l'intégrale (linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire et relation de Chasles) et en avoir une interprétation géométrique comme aire sous la courbe représentative. Savoir prolonger $\int_a^b f(t)dt$ au cas où $b \leqslant a$.

Savoir que l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment est nulle ssi la fonction est la fonction nulle.

Calcul intégral Savoir que si f est une fonction continue sur un intervalle I contenant x_0 alors $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0. Savoir que toute fonction continue sur I admet des primitives sur I. Savoir calculer une intégrale à l'aide d'une primitive.

Savoir calculer l'intégrale ou déterminer une primitive d'une fonction continue par intégration par parties ou par changement de variable.

Savoir définir la valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Savoir exprimer l'intégrale d'une fonction paire/impaire sur un segment centré en 0. Cas des intégrales de fonctions périodiques sur un intervalle de période.

Formules de Taylor globales Savoir énoncer et appliquer la formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Sommes de Riemann Savoir reconnaitre et interpréter géométriquement une somme de Riemann. Maîtriser le théorème de convergence des sommes de Riemann pour une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs réelles.

Intégrale d'une fonction à valeurs complexes Savoir définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Maîtriser les propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire.

Savoir étendre aux fonctions à valeurs complexes les résultats précédents.

Questions de cours

- Démontrer qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue ou (au choix de l'élève) démontrer le théorème de Heine.
- Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t)dt$ pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et donner la définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
- Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique, montrer que $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$ de deux manières différentes.
- Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral et prouver $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = e$.
- Énoncer et illustrer le théorème de convergence des sommes de Riemann. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
- Démontrer le théorème de convergence des sommes de Riemann dans le cas d'une fonction lipschitzienne.
- Énoncer et prouver l'inégalité triangulaire dans le cas d'une fonction à valeurs complexes.

Exercices

Les exercices pourront porter sur l'intégration de fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs réelles ou complexes (y compris des exercices théoriques). **La continuité uniforme ne sera pas évaluée à travers les exercices.** Les fractions rationnelles pourront réapparaitre au détour d'un calcul.