Programme interrogations orales n°22

Du 25 au 29 Mars

Arithmétique des polynômes, fractions rationnelles

Capacités attendues

PGCD et PPCM Savoir définir un PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul comme diviseur commun de degré maximal. Maîtriser le lien entre les diviseurs communs de deux polynômes et les diviseurs d'un PGCD. Savoir que tous les PGCD sont associés et que le seul PGCD unitaire de deux polynômes A et B est noté $A \wedge B$.

Maîtriser l'algorithme d'Euclide pour déterminer un PGCD de deux polynômes et savoir appliquer l'algorithme d'Euclide étendu pour obtenir une relation de Bézout.

Maîtriser la notion de couple de polynômes premiers entre eux, le théorème de Bézout et le lemme de Gauss.

Savoir définir un PPCM de deux polynômes non nul comme multiple commun de degré minimal. Maîtriser le lien entre les multiples communs de deux polynômes et les multiples d'un PPCM. Savoir que tous les PPCM sont associés et que le seul PPCM unitaire de deux polynômes A et B est noté $A \vee B$. Maîtriser les propriétés des PGCD et PPCM.

Savoir définir un PGCD d'un nombre fini de polynômes ainsi que la notion de relation de Bézout dans de cadre. Maîtriser les notions de polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.

Polynômes irréductibles Maîtriser la notion de polynômes irréductibles sur $\mathbb{K}[X]$ et savoir que tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non constant se décompose, de manière unique, comme produit de polynômes irréductibles.

Connaitre le théorème de d'Alembert-Gauss (admis). Savoir décrire les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et maîtriser le théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Savoir que deux polynômes complexes sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont pas de racine commune.

Savoir décrire les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et maîtriser le théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Savoir que deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.

Fractions rationnelles Maîtriser les notions de fraction rationnelle, de forme irréductible d'une fraction rationnelle et de fonction rationnelle. La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme.

Maîtriser les notions de degré, de partie entière, de zéros et de pôles (avec multiplicités) d'une fraction rationnelle.

Savoir énoncer le théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ d'une fraction rationnelle.

Savoir pour utiliser une décomposition en éléments simples pour déterminer une primitive ou les dérivées successives d'une fonction rationnelle.

Dans le cas d'un pôle simple λ, savoir donner le coefficient de $\frac{1}{X-\lambda}$. Savoir décomposer en éléments simples une fraction rationnelle de la forme $\frac{P'}{P}$. En dehors de ces résultats, savoir déterminer, sur des exemples simples, la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

Questions de cours

- Donner la définition d'un PGCD de deux polynômes A et B, de $A \wedge B$ puis énoncer le théorème de Bézout et le lemme de Gauss.
- Démontrer que deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune. Cas dans $\mathbb{R}[X]$.
- Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss et décomposer X^5+1 en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$.
- Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\frac{X^4-X^3-X^2-2X+2}{X(X-1)^2}$ et en déduire une primitive de la fonction rationnelle associée.
- Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\frac{3}{X^3+1}$.
- Énoncer et démontrer la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle de la forme $\frac{P'}{P}$.

Exercices

Les exercices pourront porter sur l'intégralité du chapitre Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles.