Programme interrogations orales n°21

Du 18 au 23 Mars

Applications linéaires de dimension finie, Dénombrement

Capacités attendues

Applications linéaires en dimension finie savoir que si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$ pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Savoir définir la notion d'application linéaire de rang fini. Savoir donner des conditions suffisantes pour qu'une application linéaire soit de rang fini et savoir majorer le rang.

Savoir majorer le rang de la composée $v \circ u$ de deux applications linéaires de rang fini par $\min\{\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)\}$. Maîtriser l'invariance du rang par composition à gauche ou à droite par des isomorphismes.

Savoir définir une application linéaire par l'image d'une base, savoir caractériser l'injectivité /surjectivité/bijectivité d'une application linéaire par l'image d'une base. Savoir caractériser les espaces isomorphes par la dimension.

Connaitre la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ si E et F sont de dimension finie.

Pour les applications linéaires entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, maîtriser l'équivalence entre injectivité, surjectivité, bijectivité et rang égal à la dimension.

Maîtriser la caractérisation des automorphismes en dimension finie par l'existence d'un inverse à gauche ou à droite.

Théorème du rang Maîtriser le théorème du rang sous la forme : Si S est un supplémentaire de $\ker(u)$ dans E alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$.
Théorème du rang : Si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $n = \dim\ker(u) + \mathrm{rg}(u)$.

Formes linéaires et hyperplans Maîtriser les notions de forme linéaire et de formes coordonnées relativement à une base.

Savoir définir la notion d'hyperplan comme noyau d'une forme linéaire non nulle, la notion d'équation d'un hyperplan.

Maîtriser la caractérisation d'un hyperplan H par l'existence d'une droite vectorielle supplémentaire et dans ce cas, pour tout vecteur $v \notin H$, on a $H \oplus \mathrm{Vect}(u) = E$. Savoir comparer deux équations d'un même hyperplan.

Savoir caractériser un hyperplan par la dimension en dimension finie.

Maîtriser la notion d'équations d'un sous-espace vectoriel : si E est de dimension n, l'intersection de p hyperplans est de dimension au moins $n-p$. Tout sous-espace vectoriel de dimension $n-p$ est l'intersection de p hyperplans.

Cardinal d'ensemble fini Savoir définir le cardinal d'un ensemble fini. Savoir comparer le cardinal d'une partie d'un ensemble E fini au cardinal de E et maîtriser le cas d'égalité. Savoir appliquer ce résultat pour établir l'égalité de deux ensembles.

Opérations sur les cardinaux Savoir exprimer le cardinal d'un union disjointe ou quelconque de deux ensembles finis. Savoir exprimer le cardinal du complémentaire d'une partie d'un ensemble fini, de la différence entre deux parties d'un ensemble fini. Savoir exprimer le cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis.

Applications entre ensembles finis Maîtriser l'équivalence entre surjectivité, injectivité et bijectivité pour une application entre deux ensembles finis de même cardinal.

Savoir déterminer le nombre d'applications entre deux ensembles finis. Savoir exprimer le nombre de parties d'un ensemble fini.

p-listes et permutations Savoir définir les notions de p-liste (ou p-uplet) et de permutation d'un ensemble. Savoir déterminer le nombre de p-listes et le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble fini de cardinal n.

Savoir déterminer le nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.

Savoir déterminer le nombre de permutations d'un ensemble fini de cardinal n.

Combinaisons Maîtriser la définition combinatoire des coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ comme nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Maîtriser la formule du triangle de Pascal et la formule du binôme de Newton ainsi que l'expression factorielle des coefficients binomiaux.

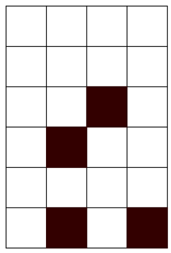
Questions de cours

- Pour $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ deux à deux distincts fixé, démontrer que, pour tout $(y_1, ...y_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$.
- Énoncer la définition et deux caractérisations des hyperplans.
- Établir la formule $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$ (en admettant le cas disjoint).
- Déterminer le nombre de parties d'un ensemble à n éléments (sans utiliser la formule du binôme ou en l'utilisant, méthode au choix de l'élève).
- Déterminer le nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n et en déduire le nombre de bijections entre deux ensembles finis.
- Donner la définition combinatoire de $\binom{n}{p}$ puis retrouver son expression factorielle.
- Exercice 3 du TD Dénombrement (reproduit ci-après pour les colleurs).

Exercices

Les exercices pourront porter l'intégralité des chapitre Espaces vectoriels de dimension finie (et en particulier sur les applications linéaires) et Dénombrement.

Exercice du TD : On considère une grille de mots croisés à 6 lignes et 4 colonnes avec 4 cases noires dont un exemplaire est représenté ci-dessous.



a) Combien peut-on former de telles grilles différentes ?

b) Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont au moins un coin noirci ?

c) Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont exactement deux coins noircis ?

d) Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont exactement une case noire par colonne ?

e) Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont exactement une case noire par colonne et au plus une case noire par ligne ?