Programme interrogations orales n°20

Du 11 au 16 Mars

Espaces vectoriels de dimension finie

Capacités attendues

Familles (finies ou non) de vecteurs Maîtriser la notion de famille génératrice d'un espace vectoriel ainsi que le principe de réduction d'une famille génératrice.

Maîtriser les notions de famille libre et famille liée Maîtriser le principe d'extension d'une famille libre. Savoir qu'une famille de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ à degrés distincts est libre.

Maîtriser les notions de base d'un espace vectoriel, de coordonnées d'un vecteur dans une base. Connaitre les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$. Savoir utiliser que toute famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (resp. $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$) de polynômes telle $\deg P_k = k$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ (resp. de $\mathbb{K}_n[X]$).

Dimension d'un espace vectoriel Savoir définir un espace vectoriel de dimension finie.

Savoir extraire une base d'une famille génératrice (théorème de la base extraite).

Savoir compléter une famille libre en une base (théorème de la base incomplète).

Savoir comparer le cardinal d'une famille libre, d'une base et d'une famille génératrice d'un espace vectoriel.

Savoir qu'une famille libre ou génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie ayant un cardinal égal à la dimension de l'espace est une base.

Savoir déterminer la dimension d'un espace vectoriel sur des exemples simples. Connaitre les dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linaire homogène d'ordre 1, de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants, de l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Maîtriser les notions de droite vectorielle et de plan vectoriel.

Savoir exprimer la dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.

Savoir définir et déterminer le rang d'une famille de vecteurs. Maîtriser la caractérisation des familles libres par le rang.

Sous-espace vectoriel en dimension finie Savoir que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie alors F est de dimension finie avec $\dim F \leqslant \dim E$ et maîtriser le cas d'égalité.

Maîtriser la formule de Grassmann.

Savoir écrire une base adaptée à la décomposition d'un espace vectoriel en deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Maîtriser la caractériser les sous-espaces vectoriels supplémentaires au moyen de l'intersection et des dimensions, au moyen de la somme et des dimensions.

Savoir que, en dimension finie, tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E possède un supplémentaire et savoir en obtenir un en pratique.

Applications linéaires en dimension finie savoir que si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$ pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Savoir définir la notion d'application linéaire de rang fini. Savoir donner des conditions suffisantes pour qu'une application linéaire soit de rang fini et savoir majorer le rang.

Savoir majorer le rang de la composée $v \circ u$ de deux applications linéaires de rang fini par $\min\{\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)\}$. Maîtriser l'invariance du rang par composition à gauche ou à droite par des isomorphismes.

Savoir définir une application linéaire par l'image d'une base, savoir caractériser l'injectivité /surjectivité/bijectivité d'une application linéaire par l'image d'une base. Savoir caractériser les espaces isomorphes par la dimension.

Connaitre la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ si E et F sont de dimension finie.

Questions de cours

- Donner les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, de $\mathbb{R}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et de $\mathbb{R}[X]$ en précisant la dimension de ces espaces (il faudra justifier que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie).
- Montrer que la famille $(1, X - a, ..., (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ de deux manières différentes.
- Définir la notion de base adaptée à une décomposition $E = F \oplus G$ et énoncer la formule de Grassmann.
- Énoncer la caractérisation des sev supplémentaires en dimension finie et prouver le théorème de la base incomplète.
- Définir le rang d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et prouver $\mathrm{rg}(u) \leqslant \min\{\dim E, \dim F\}$.
- Démontrer la relation donnant la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ pour E et F de dimensions finies.

Exercices

Les exercices pourront porter le chapitre Espaces vectoriels de dimension finie. **La notion de rang d'une application linéaire est au programme mais ni le théorème du rang, ni la caractérisation des isomorphismes n'auront été traités.**