Programme interrogations orales n°19

Du 4 au 9 Mars

Développements limités, Espaces vectoriels de dimension finie (début)

Capacités attendues

Développements limités Connaitre la définition de la notion de développement limité, de forme normalisé de développement limité, d'une fonction au voisinage d'un point. Maîtriser le principe d'unicité du développement limité. Savoir en déduire la forme d'un développement limité d'une fonction paire ou impaire.

Savoir obtenir un développement limité par troncature et savoir déterminer un équivalent à partir d'un développement limité.

Maitriser la formule de Taylor-Young. Connaitre les développements limités à tout ordre au voisinage de 0 des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, arctan, ch et sh ainsi que celui de la fonction tan à l'ordre 3.

Savoir déterminer le développement limité d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient et d'une composée. Savoir obtenir un développement limité par intégration d'un développement limité. Sur des exemples simples, savoir obtenir un développement limité de la fonction réciproque d'une bijection s'il existe.

Applications des développements limités Savoir déterminer des équivalents et des limites en utilisant les développements limités.

Savoir déterminer un prolongement par continuité et étudier la dérivabilité du prolongement.

Savoir déterminer la tangente à une courbe et étudier la position relative de la tangente et de la courbe.

Savoir utiliser un développement asymptotique pour déterminer les asymptotes d'une courbe et étudier la position relative de la courbe et de cette asymptote.

Savoir préciser la nature d'un point critique d'une fonction en un point intérieur : condition suffisante à l'ordre 2 pour avoir un extremum local.

Familles (finies ou non) de vecteurs Maîtriser la notion de famille génératrice d'un espace vectoriel ainsi que le principe de réduction d'une famille génératrice.

Maîtriser les notions de famille libre et famille liée Maîtriser le principe d'extension d'une famille libre. Savoir qu'une famille de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ à degrés distincts est libre.

Maîtriser les notions de base d'un espace vectoriel, de coordonnées d'un vecteur dans une base. Connaitre les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$. Savoir utiliser que toute famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (resp. $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$) de polynômes telle $\deg P_k = k$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ (resp. de $\mathbb{K}_n[X]$).

Questions de cours

- Énoncer la définition de f admet un développement limité d'ordre n en a. Montrer que $f : x \mapsto 1+x+x\sqrt{x}$ admet un développement limité d'ordre 0 et 1 mais pas de développement limité d'ordre 2 en 0.
- Énoncer la formule de Taylor-Young et établir le développement limité en 0 de la fonction cos à n'importe quel ordre.
- Énoncer les développements limités des fonctions exp, sin, cos, ch, sh, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) et arctan à n'importe quel ordre en 0.
- Établir le développement limité en 0 de la fonction tan à l'ordre 3 (produit de sin et $1/\cos$).
- Établir le développement limité en 0 de la fonction arctan à l'ordre 3 et retrouver celui de tan à l'ordre 3 (fonction réciproque).
- Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ admet une asymptote en $+\infty$ et préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
- Donner une base de $\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = 0\}$.
- Énoncer et prouver le principe d'extension des familles libres.

Exercices

Les exercices pourront porter l'intégralité du chapitre Développements limités ainsi que sur la bonne maîtrise des notions de familles libres, génératrices et des bases.