Programme interrogations orales n°18

Du 12 au 16 Février

Convexité, Relations de comparaison

Capacités attendues

Généralités sur la convexité Maîtriser la définition de fonction convexe et savoir interpréter géométriquement la position du graphe par rapport à ses cordes.
Maîtriser la position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes et savoir l'exploiter.
Maîtriser l'inégalité de Jensen et l'utiliser pour obtenir des inégalités.
Savoir caractériser la convexité par la croissance des pentes et maîtriser l'inégalité des pentes.

Convexité et dérivabilité Sous les bonnes hypothèses, maîtriser les équivalences

$$f\text{convexe sur } I \Leftrightarrow f' \text{ croissante sur } I \Leftrightarrow f'' \text{ positive sur } I.$$

Dans ce cas, connaitre la position du graphe de la fonction par rapport à ses tangentes.

Relations de comparaison : cas des suites Savoir définir à partir du quotient les relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence de deux suites réelles ou complexes.

Savoir traduire à l'aide du symbole o les résultats de croissances comparées des suites usuelles $\ln^{\beta}(n)$, n^{α} et $e^{\gamma n}$.

Maîtriser le lien entre les différentes relations de comparaison. En particulier, maîtriser l'équivalence entre les relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.

Maîtriser les opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissance. Savoir que le signe et les limites sont conservées par équivalence.

Maîtriser la formule de Stirling et savoir en déduire un développement asymptotique de $\ln(n!)$.

Relations de comparaison : cas des fonctions Adaptation au cas des fonctions des définitions et des résultats sur les suites (en un point fini ou en l'infini).
Obtention d'un équivalent par encadrement : Si f, g, h vérifient $f \leqslant g \leqslant h$ et $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.

Questions de cours

- Démontrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ en se ramenant à la définition, en utilisant la croissance des pentes et en utilisant la dérivée de la fonction.
- Donner la définition de fonction convexe et énoncer l'inégalité des pentes.
- Énoncer la caractérisation de la convexité pour les fonctions dérivables et dans ce cas, prouver que le graphe est au-dessus de ses tangentes.
- Démontrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.
- Énoncer et établir l'inégalité arithmético-géométrique.
- Énoncer les définitions, dans le cas des suites, des relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence et démontrer que $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- Énoncer des équivalents usuels simples en 0 de $\sin x$, $\tan x$, $\ln(1+x)$, $e^x - 1$ et $1 - \cos x$ et traduire $f(x) \underset{x \to a}{=} o(1)$, $f(x) \underset{x \to a}{=} O(1)$ et $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \lambda$ pour λ non nul.
- Énoncer la formule de Stirling et en déduire un développement asymptotique de $\ln(n!)$.
- Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \int_x^{x+1} e^t \ln(t)dt$ par encadrement.

Exercices

Les exercices pourront porter l'intégralité des chapitres Convexité et Relations de comparaison.