Programme interrogations orales n°17

Du 5 au 9 Février

Polynômes

Capacités attendues

L'ensemble des polynômes Maitriser le vocabulaire coefficient dominant, degré, polynôme unitaire. Savoir effectuer des opérations sur les polynômes : addition, multiplication par un scalaire, produit, composée. Savoir exprimer le degré de la somme, du produit et la composée de deux polynômes

Maîtriser la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Connaitre la définition de $\mathbb{K}_n[X]$ et savoir $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Maîtriser la structure d'anneau intègre de $\mathbb{K}[X]$.

Savoir distinguer polynôme et fonction polynomiale. Savoir mettre en oeuvre l'algorithme de Horner pour l'évaluation polynomiale.

Divisibilité Maîtriser les définitions de diviseur et multiple dans $\mathbb{K}[X]$ et la notion de polynômes associés.

Savoir énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ et savoir effectuer la division euclidienne de deux polynômes.

Racines d'un polynôme Connaître la définition de racine d'un polynôme par la divisibilité et par l'annulation de la fonction polynomiale associée. Connaître la définition de la multiplicité d'une racine.

Savoir que le nombre de racines d'un polynôme P non nul comptées avec multiplicité est majoré par le degré de P et savoir appliquer ce résultat (en particulier, savoir que celui-ci permet d'identifier polynôme et fonction polynomiale).

Maîtriser la définition de polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Savoir exprimer la somme et le produit des racines d'un polynôme scindé à l'aide des coefficients du polynôme. Savoir retrouver les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme (formules de Viète).

Maîtriser le théorème de d'Alembert-Gauss et savoir que tout polynôme complexe non constant est scindé sur $\mathbb{C}$.

Dérivation Maîtriser la définition de dérivée formelle d'un polynôme et savoir faire le lien avec la dérivée de la fonction polynomiale dans le cas réel. Savoir exprimer le polynôme dérivé d'un produit, d'une combinaison linéaire, d'une composée et savoir déterminer le degré d'un polynôme issu de dérivations.

Savoir déterminer la dérivée $k^{ième}$ d'un polynôme, d'une somme et d'un produit de polynômes (formule de Leibniz).

Maitriser la formule de Taylor polynomiale. Savoir caractériser la multiplicité d'une racine par les dérivées successives.

Interpolation de Lagrange Savoir que si $x_1,...,x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1,...,y_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i. Savoir donner une expression de ce polynôme d'interpolation.

Savoir décrire l'ensemble des polynômes Q tels que $Q(x_i) = y_i$ et détailler sa structure d'espace affine.

Questions de cours

- Démontrer que $\mathbb{K}[X]$ est intègre et déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.
- Énoncer le théorème de la division euclidienne d'un élément de A de $\mathbb{K}[X]$ par un élément B de $\mathbb{K}[X]\backslash\{0\}$ et l'appliquer au calcul des puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ qui vérifie $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$.
- Montrer qu'il existe un <u>unique</u> polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sin(3x) = P(\sin x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Énoncer trois assertions équivalentes au fait que $\alpha \in \mathbb{K}$ soit une racine de multiplicité m de $P \in \mathbb{K}[X]$ ainsi que la formule de Taylor pour les polynômes.
- Donner la définition de polynôme scindé, énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss et son corollaire associé à cette notion puis, pour un polynôme scindé, donner une expression du produit et de la somme du produit des racines à l'aide des coefficients.
- Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (unicité à prouver et forme explicite à donner pour l'existence) où $x_1,...,x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1,...,y_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Exercices

Les exercices pourront porter l'intégralité du chapitre Polynômes. **(Attention, l'arithmétique des polynômes sera vue dans un autre chapitre. Pas de polynômes irréductibles, de factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, pgcd... cette semaine**.