Programme interrogations orales n°16

Du 29 Janvier au 2 Février

Applications linéaires

Capacités attendues

Généralités et structures sur les applications linéaires Maîtriser la définition d'application linéaire entre deux espaces vectoriels. Connaitre le vocabulaire endomorphisme, forme linéaire. Opérations sur les applications linéaires (combinaison linéaire , composition, bilinéarité). Savoir que $\mathcal{L}(E,F)$ possède une structure d'espace vectoriel, que $\mathcal{L}(E)$ possède une structure d'anneau et maîtriser la notion u^n pour $u \in \mathcal{L}(E)$. Maîtriser les notions d'isomorphisme, d'espaces isomorphes, d'automorphisme. Savoir que la bijection réciproque d'un isomorphisme est linéaire. Maîtriser la définition et la structure de groupe de $GL(E)$.

Applications linéaires et sous-espaces vectoriels Savoir que l'image directe d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel. Maitriser la notion de noyau et d'image d'une application linéaire. Savoir préciser la structure affine de l'ensemble des solutions d'une équation de la forme $u(x) = b$ avec $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $b \in F$ donnés.

Maîtriser la caractérisation l'injectivité d'une application linéaire à l'aide du noyau.

Si $E = E_1 \oplus E_2$, $u_1 \in \mathcal{L}(E_1,F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2,F)$, il existe une unique application linéaire qui coïncide avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.

Endomorphismes remarquables Maîtriser la définition d'homothéties.

Maîtriser la notion de projecteur et de symétrie associés à deux sous-espaces supplémentaires, savoir illustrer ces notions dans le plan ou dans l'espace.

Maîtriser les propriétés des projecteurs et des symétries.

Maîtriser la caractérisation des projecteurs par $p \circ p = p$, la caractérisation des symétries par $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

L'ensemble des polynômes Maitriser le vocabulaire coefficient dominant, degré, polynôme unitaire. Savoir effectuer des opérations sur les polynômes : addition, multiplication par un scalaire, produit, composée. Savoir exprimer le degré de la somme, du produit et la composée de deux polynômes

Maîtriser la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Connaitre la définition de $\mathbb{K}_n[X]$ et savoir $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Maîtriser la structure d'anneau intègre de $\mathbb{K}[X]$.

Savoir distinguer polynôme et fonction polynomiale. Savoir mettre en oeuvre l'algorithme de Horner pour l'évaluation polynomiale.

Questions de cours

- Donner la définition d'une application linéaire, de son image et de son noyau puis énoncer la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire.
- Donner les définitions d'application linéaire, d'endomorphisme, d'isomorphisme, de forme linéaire, d'automorphisme et donner les structures de $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{L}(E)$ et $GL(E)$.
- Donner la définition d'une application linéaire puis démontrer que l'image réciproque d'un sev F' de F est un sev de E.
- Donner la définition d'un projecteur et d'une symétrie puis rappeler leurs propriétés (relation entre s et p, $p \circ p$, $s \circ s$ et interprétation des différents espaces en termes de noyau ou d'image). Tous ces résultats devront être illustrés dans le plan ou dans l'espace.
- Énoncer la caractérisation des projections. Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique (version 2 par utilisation d'une symétrie).
- Énoncer les relations précisant le degré d'une somme, d'un produit et de la composée de deux polynômes puis démontrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- Une question de l'exercice à préparer : Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
    a) Montrer que $\ker(f) = \ker(g \circ f) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.
    b) Montrer que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) + \ker(g) = F$.

Exercices

Les exercices pourront porter l'intégralité du chapitre Applications linéaires. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ et sa structure d'espace vectoriel pourront être utilisés dans les exercices **(Attention, aucun résultat sur la divisibilité ou les racines n'est au programme de cette semaine)**.