Programme interrogations orales n°15

Du 12 au 26 Janvier

Espaces vectoriels

Capacités attendues

Espaces vectoriels Connaître la définition de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et maîtriser les exemples de référence $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^\Omega$ (cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$) et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Savoir munir un produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels d'une structure d'espace vectoriel.
Savoir effectuer des calculs dans un espace vectoriel.
Maitriser la notion de famille presque nulle de scalaires et la notion de combinaison linéaire d'une famille (finie ou non) de vecteurs.

Sous-espaces vectoriels Connaître la définition et savoir utiliser la caractérisation d'un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Maîtriser la notion de sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs, par une partie A (notation $\mathrm{Vect}(A)$). Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\mathrm{Vect}(A)$.

Savoir que l'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. Savoir, qu'en général, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel ce qui amène à considérer la somme de sous-espaces vectoriels.

Maîtriser la définition de somme de deux sous-espaces vectoriels, de somme directe de sous-espaces vectoriels par unicité de la décomposition comme somme de tout vecteur. Maîtriser la caractérisation de la somme directe par l'intersection.

Maîtriser la notion de sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Sous-espaces affines d'un espace vectoriel Avoir une représentation de la structure affine d'un espace vectoriel. Distinction point, vecteur. Maîtriser l'équivalence $B = A + \vec{u}$ ssi $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et la notion de translation. Maîtriser la notion de sous-espace affine d'un espace vectoriel et la notion de direction. Savoir décrire en ces termes l'ensemble des solutions d'un systèmes linéaires compatibles, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2, l'ensemble des suites vérifiant une relation arithmético-géométrique. Visualiser les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Savoir décrire l'intersection de sous-espaces affines.

Questions de cours

- Énoncer la définition de sev engendré par une famille finie de vecteurs et démontrer que $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de deux manières différentes.

- Démontrer que l'intersection de deux sev est un sev.

- Démontrer que la somme de deux sev est un sev.

- Énoncer la définition de $F + G$, de somme directe de F et de G, la caractérisation des sommes directes et deux énoncés équivalents à $E = F \oplus G$.

- Démontrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- Donner la définition d'une application linéaire, de son image et de son noyau puis écrire le noyau de $\Delta : \begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto f' - 2f \end{cases}$ comme sev engendré. **Attention, les exercices sur les applications linéaires seront posés la semaine suivante.**

Exercices

Les exercices pourront porter l'intégralité du chapitre Espaces vectoriels. La semaine suivante sera consacrée aux applications linéaires.