Programme interrogations orales n°14

Du 15 au 19 Janvier

Accroissements finis, Espaces vectoriels (début)

Capacités attendues

Théorèmes des accroissements finis Savoir énoncer et appliquer le théorème de Rolle et la formule des accroissements finis. Maîtriser les interprétations géométrique et cinématique de ces théorèmes.

Savoir énoncer et appliquer l'inégalité des accroissements finis. Maîtriser la définition de fonction lipschitzienne. Maîtriser le corollaire : Si f est dérivable sur un intervalle I et si $|f'|$ est majorée par K alors f est K-lipschitzienne.

Applications Application à l'étude des fonctions monotones : savoir caractériser les fonctions monotones, constantes ou strictement monotones parmi les fonctions dérivables.

Savoir appliquer l'inégalité des accroissements finis pour étudier une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Maîtriser le théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I\backslash\{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Savoir étendre ce résultat au cas $\ell = \pm\infty$.

Cas des fonctions complexes Maîtriser l'inégalité des accroissements finis pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs complexes. Savoir que le théorème de Rolle et l'inégalité des accroissements finis ne s'étendent pas au cas des fonctions complexes.

Espaces vectoriels Connaître la définition de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et maîtriser les exemples de référence $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^\Omega$ (cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$) et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Savoir munir un produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels d'une structure d'espace vectoriel.
Savoir effectuer des calculs dans un espace vectoriel.

Sous-espaces vectoriels **À partir de Mardi uniquement !** Connaître la définition et savoir utiliser la caractérisation d'un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Questions de cours

- Énoncer le théorème de Rolle, la formule et l'inégalité des accroissements finis puis donner la définition de fonction lipschitzienne.
- Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

- Étude de la suite définie par $u_0 \in [-1, 1]$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$.
- Justifier que le prolongement de la fonction $x \mapsto x^2 \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
- Démontrer l'inégalité des accroissements finis pour une fonction dérivable à valeurs complexes.
- Donner la définition de $\text{Vect}(e_1, ..., e_n)$ et déterminer si $x \mapsto A\cos(x - \phi)$ et $x \mapsto \sin(2x)$ appartiennent ou non à $\text{Vect}(\cos, \sin)$.
- **À partir de Mardi uniquement !** Énoncer la caractérisation des sous-espaces vectoriels et démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- **À partir de Mardi uniquement !** Énoncer la caractérisation des sous-espaces vectoriels et démontrer que $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'' + a(x)f' + b(x)f = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercices

Les exercices pourront porter l'intégralité du chapitre Accroissements finis. À partir de mardi, la maîtrise des techniques usuelles permettant de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel pourra également être évaluée.