Programme interrogations orales n°13

Du 8 au 12 Janvier

Systèmes linéaires et calcul matriciel (fin), Dérivabilité

Capacités attendues

Matrices carrées inversibles Savoir définir les notions de matrice inversible, de l'inverse d'une matrice carrée. Maîtriser la structure de groupe de l'ensemble des matrices carrées inversibles, appelé groupe linéaire et noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Savoir exprimer l'inverse d'un produit de matrices inversibles, l'inverse de la transposée d'une matrice inversible.

Savoir que les matrices des opérations élémentaires sont inversibles et que les inverses sont aussi des matrices d'une opération élémentaire. Savoir que l'inversibilité d'une matrice est préservée par les opérations élémentaires.

Maîtriser et savoir utiliser les caractérisations des matrices inversibles suivantes :
◇ Matrices inversibles et systèmes linéaires :

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible } &\Leftrightarrow [AX = 0 \Rightarrow X = 0 \text{ pour toute matrice colonne } X], \\ &\Leftrightarrow \text{ Pour tout } B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \text{ le système } AX = B \text{ admet une unique solution.} \end{aligned}$$

◇ Matrices inversibles et inverses :

$$A \text{ est inversible } \Leftrightarrow A \text{ admet un inverse à gauche } \Leftrightarrow A \text{ admet un inverse à droite.}$$

Savoir déterminer l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss-Jordan ou par résolution d'un système linéaire.

Nombre dérivé, fonctions dérivés Maîtriser la définition de la dérivabilité en un point ainsi que la définition équivalente à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1. Savoir interpréter graphiquement la notion de dérivabilité en un point.

Connaitre les définitions de dérivabilité à gauche et à droite en un point et savoir relier ces notions à la dérivabilité en ce point.

Connaitre la définition de dérivabilité sur un intervalle et savoir définir la fonction dérivée d'une fonction dérivable sur un intervalle.

Connaitre les dérivées des fonctions usuelles. Maîtriser les opérations sur les fonctions dérivables en un point ou sur un intervalle : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque. Savoir déterminer la dérivée d'une fonction dérivable.

Propriétés des fonctions dérivables Maîtriser le lien entre dérivabilité et continuité : la dérivabilité entraîne la continuité.

Maitriser le lien entre extrema locaux et dérivabilité : condition nécessaire en un point intérieur.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle Savoir définir la notion de fonction k fois dérivable. Maîtriser les opérations sur les fonctions k fois dérivable : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition. Savoir déterminer la dérivée n-ième d'un produit de deux fonctions.

Maîtriser la définition de fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle. Maîtriser les opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle : combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque.

Questions de cours

- Donner la définition de matrice inversible et prouver la relation donnant l'inverse de la transposée. Justifier qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $A^2 - I_n = 2A$ est inversible.
- Prouver l'implication :

$$[\text{ Pour tout } B, \text{ le système } AX = B \text{ admet une unique solution}] \Rightarrow [A \text{ est inversible}].$$

- Énoncer la caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par les systèmes linéaires et prouver que A admet un inverse à gauche si et seulement si A est inversible si et seulement si A admet un inverse à droite.
- Énoncer le principe de la méthode du pivot de Gauss-Jordan pour déterminer l'inverse d'une matrice et justifier qu'on aboutit bien au résultat attendu.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la dérivée $n^{ième}$ de $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2 + x + 1)e^{-x} \end{cases}$.
- Étude de la régularité de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$. Prolongement par continuité en 0, dérivabilité sur $\mathbb{R}$, non de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Donner la définition de fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et justifier une expression des dérivées successives de $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Exercices

Les exercices pourront porter l'intégralité du chapitre Systèmes linéaires et calcul matriciel ainsi que sur la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles. Les résultats sur les accroissements finis feront l'objet du prochain chapitre.