Programme interrogations orales n°12

Du 18 au 22 Décembre

Systèmes linéaires et calcul matriciel

Capacités attendues

Généralités sur les systèmes linéaires Maîtriser la notion de système linéaire à n équations et p inconnues ainsi que la notion de système homogène associé à un système linéaire. Maîtriser la notion de système compatible.

Savoir interpréter géométriquement dans le plan et dans l'espace les systèmes 2×2 et 2×3.

Maîtriser l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre un résoudre un système linéaire. Maîtriser les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i (\lambda \neq 0)$ et $L_i \leftrightarrow L_j$. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Opérations sur les matrices Maîtriser les notations et le vocabulaire associés à la notion de matrice.

Savoir définir et manipuler une combinaison linéaire de matrices. Savoir écrire une matrice comme combinaison linéaire de matrices élémentaires (attention, nouveau vocabulaire, il s'agit ici des matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).

Savoir interpréter et manipuler la transposée d'une matrice (notation A^T). Savoir exprimer la transposée d'un produit de matrice. Savoir définir une matrice symétrique ou une matrice antisymétrique.

Savoir définir, manipuler le produit matriciel et maîtriser les propriétés de celui-ci. Savoir exprimer le produit de deux matrices élémentaires ($E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$), savoir exprimer la transposée d'un produit.

Écriture matricielle d'un système linéaire Savoir écrire un système linéaire sous forme matricielle. Un système linéaire $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Savoir que les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_p + X_0$ où X_p est une solution particulière et où X_0 parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Savoir interpréter les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen d'un produit à gauche par une matrice (de transvection, de dilatation, de transposition).

Anneau des matrices carrées Savoir que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau (non commutatif). Maîtriser les notions de matrice identité, de matrice scalaire et de matrice nilpotente.

Savoir définir une matrice triangulaire. Savoir que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures ou diagonales) est stable par combinaison linéaire et multiplication.

Maîtriser la formule du binôme de Newton et ses hypothèses dans le cas matriciel. Savoir calculer les puissances d'une matrice carré dans des cas simples.

Matrices carrées inversibles Savoir définir les notions de matrice inversible, de l'inverse d'une matrice carrée.

Questions de cours

- Démontrer que toute matrice carrée se décompose de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. La structure du raisonnement par analyse-synthèse devra être particulièrement mise en valeur.
- Énoncer la formule du binôme de Newton avec ses hypothèses et l'appliquer au calcul des puissances de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
- Donner la définition de matrice inversible, de $GL_n(\mathbb{K})$ et préciser la structure de cet ensemble.
- Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ (exercice vu en td, les propriétés de la trace ne sont pas exigibles).

Exercices

Les exercices pourront porter sur les parties détaillées ci-avant du chapitre Systèmes linéaires et calcul matriciel.