Programme interrogations orales n°11

Du 11 au 15 Décembre

Structures algébriques usuelles

Capacités attendues

Loi de composition interne Maîtriser la notion de loi de composition interne et le vocabulaire associativité, commutativité, élément neutre, élément symétrique.
Savoir qu'un élément neutre, s'il existe, est unique. Dans le cas associatif, savoir qu'un élément symétrique, s'il existe, est unique.
Savoir exprimer l'élément symétrique de $a \star b$ si a et b admettent un élément symétrique.

Structure de groupe Maîtriser la définition de groupe, de groupe abélien. Maitriser les notations dans un groupe additif (0, $-x$ et nx) et dans un groupe multiplicatif (1, x^{-1} et x^n).
Connaitre des exemples usuels de groupes additifs $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$ et $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+)$.
Connaitre des exemples usuels de groupes multiplicatifs $(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathbb{Q}^{+*},\times)$, $(\mathbb{R}^{+*},\times)$ et $(\mathbb{U},\times)$.
Savoir définir la notion de permutation d'un ensemble X et savoir que l'ensemble $(S_X,\circ)$ des permutations de X est un groupe.
Maîtriser la notion de groupe produit.

Sous-groupe et morphisme de groupes Maîtriser la notion de partie stable par une loi de composition interne. Maîtriser la définition et la caractérisation des sous-groupes et savoir l'appliquer au cas de $\mathbb{U}_n$.
Maîtriser la notion de morphisme de groupes. Savoir que l'image directe et l'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes est un sous-groupe.
Savoir définir le noyau et l'image d'un morphisme de groupes. Savoir caractériser l'injectivité d'un morphisme de groupes par le noyau. Maîtriser les notions d'isomorphisme de groupes, de groupes isomorphes et d'automorphisme.

Structure d'anneau Maîtriser la notion de distributivité entre lois de composition interne.
Maîtriser les notions d'anneau, d'anneau commutatif, d'anneau intègre et de corps (un anneau est unitaire, un corps est commutatif). Connaitre les exemples usuels $(\mathbb{Z},+,\times)$, $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{C},+,\times)$ et $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,\times)$ et savoir s'ils sont intègres ou non, si ce sont des corps ou non.
Savoir que l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau possède une structure de groupe.
Maîtriser la factorisation de $a^n - b^n$ et la formule du binôme de Newton dans un anneau.
Maîtriser la notion et la caractérisation des sous-anneaux. Maîtriser la notion de morphisme d'anneaux, d'isomorphisme.

Questions de cours

- Montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe (en revenant à la définition) et énoncer la caractérisation des sous-groupes.
- Donner la définition d'un groupe et montrer que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- Soient $f : (G_1, \star_1) \to (G_1, \star_2)$ un morphisme de groupes et H_1 un sous-groupe de G_1. Montrer que $f(H_1)$ est un sous-groupe de G_2.
- Soient $f : (G_1, \star_1) \to (G_1, \star_2)$ un morphisme de groupes et H_2 un sous-groupe de G_2. Montrer que $f^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe de G_1.
- Donner la définition de morphisme de groupes, de noyau d'un morphisme de groupes et démontrer la caractérisation de l'injectivité par le noyau.
- Donner la définition d'anneau et montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
- Donner la définition d'anneau intègre, de corps et de morphisme d'anneaux.

Exercices

Les exercices pourront porter sur l'intégralité du chapitre Structures algébriques usuelles.