Programme interrogations orales n°10

Du 4 au 8 Décembre

Continuité

Capacités attendues

Continuité en un point Maîtriser la définition de la continuité en un point a de l'ensemble de définition d'une fonction f. Connaitre la définition de la continuité à droite et à gauche et maîtriser l'équivalence : f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a. Maîtriser la caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

Continuité sur un intervalle Connaitre la définition d'une fonction continue sur un intervalle. Savoir justifier qu'une fonction est continue en utilisant les opérations sur les fonctions continues : combinaisons linéaires, produit, quotient, composée.

Maîtriser la notion de prolongement par continuité d'une fonction en un point.

Théorème des valeurs intermédiaires Savoir énoncer et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. Savoir que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Maîtriser le cas d'une fonction continue strictement monotone.

Fonctions continues sur un segment Maîtriser le théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Monotonie et continuité Savoir qu'une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone. Savoir justifier qu'une fonction est bijective et étudier la continuité de la bijection réciproque en utilisant le théorème suivant : Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$, et sa bijection réciproque est continue et strictement monotone sur l'intervalle J, de même monotonie que f.

Cas des fonctions à valeurs complexes Maîtriser les définitions de limite en a, de continuité en a et de continuité sur I d'une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs complexes. Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Maîtriser la définition de fonction bornée au voisinage d'un point a. Toute fonction admettant une limite finie en a est bornée au voisinage de a.

Maîtriser les opérations sur les fonctions admettant une limite finie en a, continues en a ou continues sur un intervalle I.

Toute fonction continue sur un intervalle et à valeurs complexes est bornée et atteint ses bornes.

Questions de cours

- Donner la définition du prolongement par continuité d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ en une extrémité a de I n'appartenant pas à I. Énoncer une caractérisation de l'existence d'un tel prolongement.
- Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
- Démontrer le théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
- Montrer que, pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive sur $[a, b]$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, on ait $f(x) \geqslant \alpha$.
- Démontrer qu'une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.
- Énoncer le théorème relatif à la continuité des bijections réciproques.

Exercices

Les exercices pourront porter sur l'intégralité du chapitre Continuité.