CHAPITRE IX : LIMITES ET FONCTIONS
Correction

Méthode 1 : Notons T une période de g. Soient x et y deux réels distincts tels que $x < y$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x < y < x + mT$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x + nT < y + nT < x + (m+n)T.$$

La fonction $f + g$ étant croissante, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x+nT) + g(x+nT) \leqslant f(y+nT) + g(y+nT) \leqslant f(x+mT+nT) + g(x+(m+n)T).$$

La fonction g étant T-périodique, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x+nT) + g(x) \leqslant f(y+nT) + g(y) \leqslant f(x+mT+nT) + g(x). \qquad (\star)$$

Étant donné que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, on a

$$f(x+nT) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad f(y+nT) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } f(x+mT+nT) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les inégalités larges étant conservées par passage à la limite dans $(\star)$, on trouve

$$g(x) \leqslant g(y) \leqslant g(x).$$

Donc $g(x) = g(y)$. Autrement dit, la fonction g est constante.
Méthode 2 : La fonction $f + g$ est croissante donc, grâce au théorème des limites monotones, la fonction $f + g$ admet une limite en $+\infty$ (limite finie ou $+\infty$), ie

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = \ell \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = +\infty$$

On écrit $g(x) = (f+g)(x) - f(x)$ et on montre que $f + g$ puis g admettent une limite finie en $+\infty$.

> Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+g(x)-f(x) = +\infty$ ce qui est impossible. En effet, si c'était le cas, pour $A > |g(0)|$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant x_0 \Rightarrow g(x) \geqslant A$. Or, pour n assez grand, on a $nT \geqslant x_0$ donc $g(0) = g(nT) \geqslant A > |g(0)|$ ce qui est absurde.

Par conséquent, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = \ell$ puis $g(x) = f(x) + g(x) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - 0 = \ell$.
En tant que fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$, la fonction g est constante.