

Programme interrogations orales n°9

Du 27 Novembre au 1 Décembre

Suites numériques (fin), Limites et fonctions

Capacités attendues

Suites extraites Maîtriser la définition d'une suite extraite.

Maîtriser le principe de fidélité du comportement des suites extraites.

Savoir que si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite alors (u_n) converge également vers cette limite.

Savoir utiliser des suites extraites pour montrer la divergence d'une suite.

Maîtriser le théorème de Bolzano-Weierstrass (cas réel et cas complexe).

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 Savoir déterminer une forme explicite d'une suite récurrente linéaire homogène à coefficients constants d'ordre 2.

Suite $u_{n+1} = f(u_n)$ Maîtriser la notion d'intervalle stable par f . Savoir étudier la monotonie de (u_n) en exploitant les variations de f ou en étudiant le signe de $f(x) - x$. Savoir que si (u_n) converge vers un réel ℓ en lequel f est continue alors $\ell = f(\ell)$.

Limite d'une fonction en un point Savoir traduire le fait qu'une propriété portant sur une fonction est vraie au voisinage d'un point (fini ou infini). Maîtriser la définition d'une limite finie ou infinie d'une fonction en un point a . Maîtriser la définition d'une limite finie ou infinie d'une fonction en $\pm\infty$. Savoir démontrer l'existence d'une limite ℓ en majorant $|f(x) - \ell|$.

Savoir que si f possède une limite finie en a et est définie en a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Limite à gauche, à droite Connaitre les définitions de limites à droite et à gauche et maîtriser le lien entre la limite en un point et les limites à gauche et à droite en ce même point.

Maîtriser les définitions de continuité en un point, de continuité à gauche et de continuité à droite. Maîtriser le lien entre la continuité en un point et la continuité à gauche et à droite en ce même point.

Propriétés locales Savoir que si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a . Maîtriser la caractérisation séquentielle des limites (finies ou infinies). Savoir utiliser cette dernière pour prouver qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.

Opérations sur les limites Maîtriser les règles sur les combinaisons linéaires, les produits, les quotients et les compositions de limites. Savoir les mettre en oeuvre sur des calculs simples en l'absence d'outils efficaces.

Étude d'une limite par comparaison Savoir que les inégalités larges sont stables par passage à la limite. Maîtriser les théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$) et de majoration (limite $-\infty$).

Maîtriser le théorème de la limite monotone.

Questions de cours

- Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass (cas réel) et démontrer le cas complexe (application en cascade du cas réel).
- Donner la forme explicite des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, cas complexe et réel (admis).
- Étudier la suite donnée par $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}$ avec $u_0 \geq 0$.
- Donner la définition d'une limite finie ou infinie d'une fonction en un point a fini ou infini. Savoir écrire la définition et sa négation en terme de quantificateurs.
- Énoncer la caractérisation séquentielle des limites et prouver que la fonction \cos ne possède pas de limite en $+\infty$.
- Démontrer la caractérisation séquentielle des limites.
- Énoncer le théorème de la limite monotone.

Exercices

Les exercices pourront porter sur les suites récurrentes linéaires d'ordre deux, sur l'utilisation des suites extraites ainsi que sur l'intégralité du chapitre Limites et fonctions.