Programme interrogations orales n°8

Du 20 au 24 Novembre

Suites numériques (début)

Capacités attendues

Généralités sur les suites Connaître les différents modes de définition d'une suite. Savoir passer d'une expression récursive à une expression explicite dans le cas des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.

Maîtriser les notions de suites croissantes, décroissantes, monotones. Savoir étudier la monotonie d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ en utilisant la croissance de f (si c'est ce le cas) ou en étudiant le signe de $f(x) - x$.

Maîtriser les notions de suites minorées, majorées, bornées.

Maîtriser la notion de suite stationnaire

Limite d'une suite réelle Maîtriser les définitions de limite finie ou infinie d'une suite. Savoir que la limite d'une suite, si elle existe, est unique. Savoir que toute suite convergente est bornée et que toute suite tendant vers l'infini est non bornée.

Maîtriser les opérations sur les limites : combinaisons linéaires, produit, quotient. Produit d'une suite bornée et d'une suite tendant vers 0.

Savoir que seules les inégalités larges sont stables par passage à la limite. Si (u_n) converge vers $\ell > 0$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Théorèmes d'existence d'une limite Maîtriser et savoir utiliser les théorèmes ci-après pour justifier la convergence ou la divergence de suites :

Théorème de convergence par encadrement (maîtriser la notion de partie dense de $\mathbb{R}$ et savoir utiliser la caractérisation séquentielle de la densité).

Théorème de divergence par minoration ou majoration.

Théorème des limites monotones (versions convergente et divergente).

Théorème des suites adjacentes

Cas des suites complexes Savoir traduire la notion de convergence d'une suite complexe à l'aide de la convergence des suites des parties réelles et imaginaires.

Suites extraites Maîtriser la définition d'une suite extraite.

Maîtriser le principe de fidélité du comportement des suites extraites.

Savoir que si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite alors (u_n) converge également vers cette limite.

Savoir utiliser des suites extraites pour montrer la divergence d'une suite.

Questions de cours

- Donner la définition de suite arithmétique, suite géométrique ainsi que leur forme explicite. Déterminer une forme explicite de $\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = 3u_n - 8 \end{cases}$.
- Pour tout $n \geqslant 3$, on note x_n l'unique solution dans $\mathbb{R}^+$ de $x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$. Montrer que la suite (x_n) est bien définie, majorée par $\frac{1}{2}$ et croissante.
- Prouver que toute suite convergente est bornée.
- Donner la définition de limite finie (ou infinie) d'un suite puis prouver que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ' alors $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.
- Donner la définition de suite extraite. Prouver que la suite $\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)$ n'admet pas de limite.
- En notant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, montrer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes puis en déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercices

Les exercices pourront porter sur les suites numériques (réelles ou complexes). Le théorème de Bolzano-Weierstrass ainsi que les suites récurrentes linéaires d'ordre deux seront au programme de la semaine prochaine.