CHAPITRE VII : ARITHMÉTIQUE

Correction

1. On commence par prouver le résultat ci-après dont on aura besoin pour répondre à la question 3 : Si m et n sont deux entiers positifs premiers entre eux, alors $S(mn) = S(m)S(n)$.

   a) On montre que tous les diviseurs de mn s'écrivent de manière unique sous la forme d_1d_2 avec $d_1|m$ et $d_2|n$.
   ⋄ Si $d_1|m$ et $d_2|n$ alors on a bien $d_1d_2|mn$.
   ⋄ Soit d un diviseur de mn.

   - Existence : On note $d_1 = m \wedge d$ de telle sorte que $d_1|m$. On peut écrire $d = d_1d_2$ et $m = d_1m'$ avec $m' \wedge d_2 = 1$. Ainsi $d_1d_2 = d|mn = d_1m'n$ donc $d_2|m'n$ ce qui donne, sachant $d_2 \wedge m' = 1$, $d_2|n$ grâce au lemme de Gauss.
   On a prouvé $d = d_1d_2$ avec $d_1|m$ et $d_2|n$.
   - Unicité : Si $d = d_1d_2 = d'_1d'_2$ avec d_1, d'_1 qui divisent m et d_2, d'_2 qui divisent n. On a $d'_1|d_1d_2$ et $d'_1 \wedge d_2 = 1$ (car $d'_1 \wedge d_2$ est un diviseur commun de m et de n qui sont premiers entre eux) donc $d'_1|d_1$ grâce au lemme de Gauss. On montre de même $d_1|d'_1$ donc $d_1 = d'_1$ puis $d_2 = d'_2$.

   b) On note $\mathcal{D}^+(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n. Grâce à la question précédente, on peut écrire
   $$\mathcal{D}^+(mn) = \{d \in \mathbb{N},\ \ d|mn\} = \left\{d_1d_2,\ d_1 \in \mathcal{D}^+(m) \text{ et } d_2 \in \mathcal{D}^+(n)\right\}.$$
   Il s'ensuit
   $$\begin{aligned} S(mn) &= \sum_{d\in\mathcal{D}^+(mn)} d = \sum_{\substack{d_1\in\mathcal{D}^+(m)\\ d_2\in\mathcal{D}^+(n)}} d_1d_2 = \sum_{d_1\in\mathcal{D}^+(m)}\sum_{d_2\in\mathcal{D}^+(n)} d_1d_2 \\ &= \left(\sum_{d_1\in\mathcal{D}^+(m)} d_1\right)\left(\sum_{d_2\in\mathcal{D}^+(n)} d_2\right) = S(m)S(n). \end{aligned}$$

2. Si p un nombre premier tel que $2^p - 1$ est premier.
Méthode 1 : Puisque $2^p - 1$ est premier, ses diviseurs sont 1 et lui-même. Ainsi $S(2^p - 1) = 1 + 2^p - 1 = 2^p$. De plus, on a $S(2^{p-1}) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} 2^k = \frac{1-2^p}{1-2} = 2^p - 1$. Enfin, les entiers 2^{p-1} et $2^p - 1$ sont premiers entre eux (car par exemple, $1 \times (2^p - 1) + (-2) \times 2^{p-1} = 1$), le résultat de la question précédente donne
$$S(n) = S(2^{p-1}(2^p - 1)) = S(2^{p-1})S(2^p - 1) = (2^p - 1)2^p = 2n.$$
Par conséquent, l'entier n est parfait.
Méthode 2 : L'écriture $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ correspond alors à la décomposition de n en produit de facteurs premiers. Par conséquent, les diviseurs positifs de n sont les éléments de
$$\mathcal{D}^+(n) = \left\{2^k,\ \ k \in [\![0, p-1]\!]\right\} \cup \left\{2^k(2^p - 1),\ \ k \in [\![0, p-1]\!]\right\}.$$

Il s'ensuit

$$S(n) = \sum_{k=0}^{p-1} 2^k + \sum_{k=0}^{p-1} 2^k(2^p-1) = 2^p \sum_{k=0}^{p-1} 2^k = 2^p \frac{2^p-1}{2-1} = 2^p(2^p-1) = 2n.$$

Par conséquent, l'entier n est parfait.

3. Si n est un nombre parfait pair. En utilisant la décomposition de n en produit de facteurs premiers, on peut écrire $n = 2^{p-1}m$ avec $p \geqslant 2$ (car n pair) et m impair. En particulier, 2^{p-1} et m sont premiers entre eux. On peut alors écrire d'une part $2n = 2^p m$ et d'autre part

$$\begin{aligned} 2n &= S(n) \quad \text{car } n \text{ est un nombre parfait} \\ &= S(2^{p-1})S(m) \text{ car } 2^{p-1} \text{ et } m \text{ sont premiers entre eux} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{p-1} 2^k\right) S(m) = (2^p-1)S(m). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $2^p m = (2^p-1)S(m)$. Les entiers 2^p et 2^p-1 sont consécutifs donc premiers entre eux et $2^p-1|2^p m$ donc $2^p-1|m$ d'après le lemme de Gauss. On peut ainsi écrire $m = (2^p-1)m'$ puis $2^p(2^p-1)m' = (2^p-1)S(m)$ ce qui donne

$$S(m) = 2^p m' = m + m' \text{ avec } m = (2^p-1)m'.$$

Les entiers 1, m, m' et 2^p-1 étant des diviseurs de m, la relation $S(m) = m + m'$ implique que m n'a pas d'autres diviseurs que m et 1. Ainsi $m' = 1$ et $m = 2^p - 1$ est premier.
Par conséquent $n = 2^{p-1}(2^p-1)$ avec 2^p-1 premier (donc p premier).