Programme interrogations orales n°5

Du 16 au 20 Octobre

Fonctions d'une variable réelle

Capacités attendues

Généralités sur les fonctions Maîtriser les notions d'ensemble de définition et de graphe d'une fonction. Savoir représenter le graphe des fonctions $x \mapsto f(x+a)$ et $x \mapsto f(ax)$ à partir du graphe d'une fonction f. Savoir résoudre graphiquement les équations et inéquations du type $f(x) = \lambda$ et $f(x) \leqslant \lambda$.

Savoir définir les notions de fonctions paires, impaires, périodiques et savoir interpréter géométriquement ces propriétés pour réduire le domaine d'étude.

Maîtriser les opérations d'addition, de produit, de quotient et de composée de fonctions.

Savoir définir les notions de fonctions (strictement) croissantes, fonctions (strictement) décroissantes, fonctions monotones.

Savoir définir les notions de fonctions majorées, minorées, bornées et savoir interpréter graphiquement ces propriétés. Maîtriser l'équivalence f bornée si et seulement si $|f|$ majorée.

Savoir étendre ces définitions et résultats au cas des fonctions à valeurs complexes.

Dérivation Maîtriser les définitions de dérivabilité en un point, sur un intervalle. Savoir définir le nombre dérivé d'une fonction en un point, la fonction dérivée d'une fonction s'ils existent.

Savoir déterminer une équation de la tangente en un point de la courbe représentative d'une fonction.

Maîtriser les règles de dérivation d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, de la composée de fonctions dérivables. Savoir déterminer la fonction dérivée d'une fonction.

Savoir établir le tableau de variations d'une fonction.

Cas des fonctions bijectives : Savoir représenter graphiquement la fonction réciproque d'une fonction bijective f à partir du graphe de f. Savoir calculer et interpréter géométriquement la dérivée de la fonction réciproque d'une bijection.

Savoir étendre ces définitions et ces résultats au cas des fonctions à valeurs complexes en utilisant la partie réelle et la partie imaginaire. Savoir exprimer la dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.

Étude d'une fonction Savoir déterminer des extremums et établir des inégalités grâce à l'étude d'une fonction.

Primitives Maîtriser la définition de primitive d'une fonction définie sur un intervalle. Savoir décrire l'ensemble des primitives d'une fonction définie sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.

Savoir déterminer des primitives par lecture inverse des formules de dérivation. Savoir utiliser les primitives de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ pour calculer celles de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$. Savoir déterminer les primitives des fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$.

Savoir que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Savoir donner une expression intégrale d'une primitive d'une fonction continue. La notation $\int f(x)dx$ est plus que déconseillée et on écrira toujours $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

Maîtriser la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle. Maîtriser la formule d'intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et savoir l'appliquer pour déterminer des primitives. Savoir effectuer un changement de variable dans une intégrale pour déterminer une primitive. À ce stade, le changement de variable à effectuer sera donné.

Questions de cours

- Donner les définitions de fonctions majorées, minorées, bornées. Établir que la somme et le produit de fonctions bornées sont des fonctions bornées.
- Donner les définitions de fonction dérivable en un point, de nombre dérivée, de fonction dérivable sur un intervalle et de fonction dérivée. Donner une équation de la tangente en un point d'abscisse a d'une fonction f.
- Pour $\varphi : I \to \mathbb{C}$, démontrer la formule donnant la dérivée de $\exp(\varphi)$.
- Déterminer les primitives des fonctions de la forme $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$.
- Déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^2}$ ou de $t \mapsto \frac{1}{2t^2+8t+8}$ ou de $t \mapsto \frac{1}{t^2-3t+2}$ en précisant l'intervalle de définition considéré (une primitive au choix de l'interrogateur).
- Donner la définition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et énoncer la formule d'intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- À l'aide du changement de variable $u = \sin t$, montrer qu'une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ est $x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Exercices

Les exercices pourront porter sur l'intégralité du chapitre Fonctions d'une variable réelle. La bonne maîtrise des techniques usuelles pour déterminer une primitive d'une fonction continue sera particulièrement évaluée.