Programme interrogations orales n°4

Du 10 au 14 Octobre

Nombres réels

Capacités attendues

Récurrence Savoir mettre en oeuvre un raisonnement par récurrence simple, double ou forte.

Ensembles usuels de nombres Connaitre les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Savoir définir la notion de droite réelle.

Relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ Savoir définir la notion de relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Maîtriser les règles de calcul avec les inégalités.

Valeur absolue Savoir définir la valeur absolue d'un nombre réel et savoir l'interpréter en termes de distance sur la droite réelle. Savoir résoudre $|x| \leqslant a$ ou $|x| \geqslant a$. Savoir exprimer la valeur absolue d'un produit, de l'inverse, d'un quotient.

Savoir résoudre les inégalités du type $|x - a| \leqslant b$ algébriquement ou à l'aide de la droite réelle.

Maîtriser l'inégalité triangulaire.

Approximation décimale Savoir définir et déterminer la partie entière d'un nombre réel.

Savoir définir la notion de valeur approchée, valeur approchée par défaut ou par excès à 10^{-n} près.

Savoir définir la notion d'approximation décimale.

Savoir que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert non vide contient un rationnel, un irrationnel.

Propriété de la borne supérieure Savoir définir les notions de majorant, minorant, maximum, minimum. Savoir définir les notions de parties minorée, majorée, bornée.

Savoir définir les notions de bornes supérieure, inférieure. Savoir caractériser une borne supérieure (resp. inférieure). Savoir justifier qu'une partie de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (resp. inférieure).

Maîtriser la notion de droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$. Savoir définir la notion d'intervalle de $\mathbb{R}$ (si $\forall (a,b) \in I^2,\ [a,b] \subset I$) et en donner une description.

Questions de cours

- Donner une expression des sommes $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$ et prouver la seconde par récurrence.
- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = -1$ et la relation $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.
- On considère la suite des nombres de Bell définie par $B_0 = 1$ et $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$. Montrer par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \frac{B_n}{n!} \leqslant 1$.
- Donner la définition de la partie entière d'un nombre réel et établir la relation $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leqslant \lfloor a + b \rfloor \leqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (par approximation décimale) puis que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est également dense dans $\mathbb{R}$.
- Définition majorant, minorant. Définition d'une partie de $\mathbb{R}$ majorée, minorée, bornée. Définition maximum, minimum. Définition borne supérieure, borne inférieure.
- Énoncer la caractérisation des bornes supérieures et la définition d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercices

Les exercices pourront porter sur l'intégralité du chapitre Nombres réels.