

Programme interrogations orales n°3

Du 3 au 7 Octobre

Ensembles, Applications et Relations

Capacités attendues

Ensembles Maîtriser les notions d'appartenance, d'inclusion, de sous-ensembles (ou parties) d'un ensemble, ensemble vide, ensemble des parties d'un ensemble.

Maîtriser les opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire. Propriétés de ces opérations (distributivité, règles de De Morgan). Savoir définir le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.

Quantificateurs Maîtriser le lien entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes.

Applications Maîtriser la notion d'application d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F , graphe d'une application. Savoir définir la fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble. Savoir définir les notions de restriction et de prolongement d'une application, la composition de deux applications.

Savoir définir et déterminer l'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une application. Image directe et image réciproque d'une réunion, d'une intersection.

Injections, surjections, bijections Maîtriser les définitions d'injection, surjection et bijection. Composée de deux injections (resp. surjections, bijections).

Savoir définir l'application réciproque d'une bijection et savoir exprimer l'application réciproque d'une composée de bijections.

Relations Maîtriser la définition de relation d'équivalence. Savoir déterminer les classes d'équivalence associées à une relation d'équivalence. Savoir que l'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de l'ensemble.

Maîtriser la définition de relation d'ordre. Maîtriser la distinction entre ordre partiel et ordre total.

Questions de cours

- Prouver $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et énoncer les lois de De Morgan.
- Définition de l'image directe et de l'image réciproque d'un ensemble par une application et prouver la formule $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
- Donner la définition d'une injection, d'une surjection entre deux ensembles E et F puis prouver que la composée de deux injections (resp. surjections) est une injection (resp. surjection) (l'examinateur choisira l'un des deux résultats).

- Soit $f : E \rightarrow F$ telle qu'il existe $g : F \rightarrow E$ avec $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$. Redémontrer que f est bijective et que $f^{-1} = g$.
- Donner la définition d'une fonction bijective et énoncer deux caractérisations des fonctions bijectives. Exprimer la bijection réciproque de la composée de deux bijections (démonstration attendue).
- Donner les définitions de relation d'équivalence, de classes d'équivalence et de relation d'ordre. Donner un exemple de relation d'équivalence (justifier), un exemple de relation qui n'est pas une relation d'équivalence (justifier) et un exemple de relation d'ordre.

Exercices

Les exercices pourront porter sur l'intégralité du chapitre Ensembles, Applications et Relations.