Programme interrogations orales n°2

Du 25 au 29 Septembre

Nombres complexes (et calcul algébrique)

Capacités attendues

Nombres complexes Savoir définir la partie réelle, la partie imaginaire et la forme algébrique d'un nombre complexe. Opérations sur les parties réelle et imaginaire. Opérations sur les complexes.

Maîtriser les notions d'affixes d'un point, d'un vecteur. Opérations sur les affixes.

Savoir définir et manipuler le conjugué d'un complexe. Compatibilité de la conjugaison avec les opérations. Interprétation géométrique de la conjugaison.

Module d'un nombre complexe Savoir définir et déterminer le module d'un nombre complexe. Interpréter géométriquement le module d'un complexe.

Maîtriser la relation $z\bar{z} = |z|^2$. Savoir manipuler le module d'un produit, d'un quotient. Savoir utiliser l'inégalité triangulaire et connaitre le cas d'égalité.

Savoir interpréter $|z - z'|$ et savoir définir un cercle ou un disque à l'aide du module.

Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$ Maîtriser le calcul de $\sum_{k=0}^{n} z^k$, savoir factoriser $a^n - b^n$ par $a - b$.
Maitriser la définition factorielle des coefficients binomiaux et connaitre les propriétés de ceux-ci. Formule du triangle de Pascal.
Savoir appliquer la formule du binôme de Newton.

Nombres complexes de module 1 Maîtriser la notation $e^{i\theta}$ (définition, valeurs remarquables, règles de calcul, paramétrisation de $\mathbb{U}$). Formules d'Euler, formule de Moivre. Savoir linéariser et exprimer $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

Savoir définir et déterminer un argument d'un complexe. Argument d'un produit, d'un quotient. Savoir mettre sous forme trigonométrique $1 \pm e^{i\theta}$. Savoir transformer $a\cos(t) + b\sin(t)$ en faisant apparaitre une phase et une amplitude. Savoir retrouver les formules donnant $\cos p \pm \cos q$ et $\sin p \pm \sin q$.

Exponentielle complexe Savoir définir l'exponentielle d'un nombre complexe et exprimer son module et un argument. Maîtriser la condition $e^z = e^{z'}$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Complexes et géométrie Savoir exprimer l'angle entre deux vecteurs à l'aide des affixes. Savoir caractériser l'alignement et l'orthogonalité à l'aide d'affixes.

Savoir interpréter en termes de transformations du plan les applications complexes : conjugaison, les translations, les rotations et les homothéties.

Savoir déterminer la nature géométrique des applications $z \mapsto az + b$ (similitudes directes uniquement).

Racines $n^{ième}$ de l'unité Savoir décrire les éléments de $\mathbb{U}_n$ et savoir que la somme des racines $n^{ième}$ de l'unité est nulle.

Savoir résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations de la forme $z^n = a$ et savoir exprimer ces solutions en fonction des racines $n^{ième}$ de l'unité. Savoir définir et déterminer les racines carrées d'un complexe.

Équations algébriques Savoir résoudre les équations polynômiales d'ordre 2 à coefficients complexes. Connaitre les relations exprimant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré. Pour une fonction polynomiale P à coefficients complexes, si a est une racine de P, savoir que l'on peut factoriser $P(z)$ par $z - a$.

Questions de cours

- Énoncer et prouver la formule du triangle de Pascal.
- Linéariser $\sin^3 x$.
- Exprimer $\cos(5x)$ en un polynôme en $\cos x$.
- Transformer $\cos p \pm \cos q$ et $\sin p \pm \sin q$ en un produit de fonctions cos ou sin. *L'examinateur choisira l'une des quatre expressions.*
- Donner la forme des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associées à une translation, à une rotation, à une homothétie puis donner la définition de similitude directe.
- Nature et caractéristiques géométriques de $f : z \mapsto 3(1 + i)z - 13$.
- Donner la définition et énoncer la description de l'ensemble des racines $n^{ième}$ de l'unité (un dessin illustrera les ensembles $\mathbb{U}_n$ pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$). Enfin, démontrer que la somme des racines n-ième de l'unité est nulle ($n \geqslant 2$).
- Résoudre $z^2 - (4 - i)z + 5 + i = 0$.

Exercices

Les exercices pourront porter sur l'intégralité du chapitre Nombres complexes.