CHAPITRE XXIV : INTÉGRATION
Correction

a) Pour tout réel t, on a

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_a^b (f(x)+tg(x))^2dx = \int_a^b f(x)^2 + 2tf(x)g(x) + t^2g(x)^2dx \\ &= \underbrace{\int_a^b f(x)^2dx}_{=C} + t \times \underbrace{2\int_a^b f(x)g(x)dx}_{=B} + t^2\underbrace{\int_a^b g(x)^2dx}_{=A} \\ &= At^2+Bt+C \quad \text{avec } A, B, C \text{ réels.} \end{aligned}$$

La fonction P est polynomiale. Par ailleurs, l'intégrale d'une fonction positive étant positive, l'écriture $P(t) = \int_a^b (f(x)+tg(x))^2dx$ justifie que P est positive.

b) $\diamond$ 1er cas : Si $A = \int_a^b g(x)^2dx = 0$ alors $P : t \mapsto Bt + C$ est affine et positive. On en déduit $A = 0$ et $C \geqslant 0$ (ce qui est le cas pour C). L'inégalité étudiée est alors vraie puisqu'elle se réécrit $B = 0 \leqslant \sqrt{A}\sqrt{C}$.
$\diamond$ 2ème cas : Si $A = \int_a^b g(x)^2dx \neq 0$. Comme $A > 0$, la fonction polynomiale $P : t \mapsto At^2 + Bt + C$ est positive si et seulement si elle n'admet pas deux racines réelles distinctes, ie ssi son discrimiant Δ vérifie $\Delta \leqslant 0$. Or, on a

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\left(\int_a^b f(x)^2dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2dx\right)$$

donc la condition $\Delta \leqslant 0$ donne $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2dx\right)$. En composant par la fonction racine, on obtient :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(x)^2dx}\sqrt{\int_a^b g(x)^2dx}$$

c) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ avec $f(a) = f(b) = 0$. Par intégration par parties, on a

$$\int_a^b f'(t)^2dt = [f'(t)f(t)]_a^b - \int_a^b f(t)f''(t)dt = -\int_a^b f(t)f''(t)dt.$$

En utilisant l'inégalité de la question précédente, il vient :

$$\left(\int_a^b f'(t)^2dt\right)^2 = \left(\int_a^b f(t)f''(t)dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2dt\right)\left(\int_a^b f''(t)^2dt\right)$$