MATHÉMATIQUES

Devoir n°9

Mardi 30 Mai 2023

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants dans l'appréciation des copies. **En particulier, il est indispensable de conclure vos réponses et d'encadrer vos résultats à la règle.**

On pourra admettre le résultat d'une question après l'avoir mentionné explicitement sur sa copie.

Questions de cours :

- Donner la définition de matrices semblables et son interprétation.
- Énoncer la caractérisation de la convergence des séries de Riemann.
- Soit E un espace préhilbertien réel. Donner la définition de la distance d'un vecteur $x \in E$ à un sev F de dimension finie (avec un joli dessin pour illustrer).

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et la relation $u_{n+1} = \sin u_n$.

1. a) En utilisant la formule des accroissements finis, montrer $\sin x < x$ pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$
   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et préciser la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$.
2. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{\sin u_n}{u_n}\right)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ divergent.
3. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ est-elle absolument convergente ? *On pourra comparer u_n et u_n^2.*

Exercice 2 On effectue une succession de n lancers d'une pièce équilibrée. À chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on gagne 1 euro. Pour tout $n \geqslant 2$, on définit la variable aléatoire X_n égale au gain total à l'issue des n lancers.
Pour tout entier $i \geqslant 1$, on pourra noter P_i et F_i les événements "obtenir pile lors du i$^{\text{ème}}$ lancer" et "obtenir face lors du i$^{\text{ème}}$ lancer". On a donc $\overline{P_i} = F_i$.

1. Préciser les ensembles $X_2(\Omega)$ et $X_3(\Omega)$ et déterminer les lois de X_2 et de X_3.
2. Soit $n \geqslant 2$. Justifier que X_n est à valeurs dans $[\![0, n-1]\!]$. Calculer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n-1)$.
3. Soit $n \geqslant 2$. On s'intéresse à la variable aléatoire X_{n+1} qui est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
   a) On note E l'événement "les côtés obtenus aux lancers n et $n+1$ sont les mêmes". Calculer $P(E)$.
   b) Prouver que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k-1)$.

4. Pour $n \geqslant 2$, on note $Q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $Q_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)t^k$.

   a) Expliciter Q_2 et Q_3.

   b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $Q_{n+1}(t) = \dfrac{1+t}{2} Q_n(t)$.

   c) En déduire que X_n suit la loi $\mathcal{B}\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$.

Problème : Dans ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $\mathcal{B}_{k,n}$ le polynôme

$$\mathcal{B}_{k,n} = \binom{n}{k} X^k \left(1 - X\right)^{n-k}.$$

Partie 1 $\left(\mathcal{B}_{k,n}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

1. a) Donner la forme développée des polynômes $\mathcal{B}_{k,2}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2$.

   b) Démontrer que la famille $\left(\mathcal{B}_{k,2}\right)_{0 \leqslant k \leqslant 2}$ est une base de $\mathbb{R}_2\left[X\right]$.

   c) Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_2\left[X\right]$, on pose :

   $$\langle P, Q\rangle = P\left(0\right)Q\left(0\right) + P\left(1\right)Q\left(1\right) + \frac{1}{4}\left(4P\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(1\right) - P\left(0\right)\right)\left(4Q\left(\frac{1}{2}\right) - Q\left(1\right) - Q\left(0\right)\right).$$

   Démontrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2\left[X\right]$ et que la famille $\left(\mathcal{B}_{k,2}\right)_{0 \leqslant k \leqslant 2}$ est orthonormée.

2. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit le polynôme $\varphi_n(P)$ par :

   $$\varphi_n(P) = nXP + X(1-X)P'$$

   a) Si P appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, démontrer que $\deg \varphi_n(P) \leqslant n$.

   b) Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   c) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer simplement $\varphi_n(\mathcal{B}_{k,n})$.

3. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-ev E. On considère des réels α_0,...,α_n deux à deux distincts et des vecteurs non nuls x_0,...,x_n de E tels que

   $$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad x_i \in \ker(u - \alpha_i \mathrm{id}_E).$$

   Enfin, on considère des réels λ_0,...,λ_n tels que $\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$.

   a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lambda_0 \alpha_0^k x_0 + \cdots + \lambda_n \alpha_n^k x_n = 0$.

   b) En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

   $$\lambda_0 P(\alpha_0)x_0 + \cdots + \lambda_n P(\alpha_n)x_n = 0.$$

   c) Montrer que la famille $(x_0, ..., x_n)$ est libre.

4. a) Démontrer que $\left(\mathcal{B}_{k,n}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n\left[X\right]$ et exprimer la matrice de φ_n dans cette base.

   b) Existe-t-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour lequel $\left(\mathcal{B}_{k,n}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormale ?

Partie 2 Préliminaires probabilistes

1. Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω, P). Rappeler la définition de la variance de X et démontrer que $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

2. Soient $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire S_n sur (Ω, P) qui suit la loi binomiale de paramètres (n, t).

   a) Rappeler la valeur de l'espérance de S_n ainsi que sa variance.

   b) Justifier $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = 1$ et utiliser la question précédente pour établir

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = n(n-1)t^2 + nt.$$

   c) Montrer que

$$\forall t \in [0,1], \quad \sum_{k=0}^{n} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \frac{t(1-t)}{n}.$$

Partie 3 Différents types de convergence

Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n(f)$ la fonction polynomiale définie sur $[0,1]$ par

$$B_n(f) : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathcal{B}_{k,n}(t).$$

De plus, si f est supposée continue, on notera $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|,\ t \in [0,1]\}$.

1. Dans cette question, on suppose que f est une fonction polynomiale de la forme $f : t \mapsto at^2 + bt + c$ avec a, b, c réels. Pour tout $t \in [0,1]$, déterminer la limite de la suite $(B_n(f)(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2. Dans cette question, on suppose que f est la fonction exponentielle, ie $f : t \mapsto e^t$.

   a) Justifier que, pour tout $t \in [0,1]$, on a $B_n(f)(t) = \left(\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) t + 1\right)^n$.

   b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n(f)(t)$ pour $t \in [0,1]$ fixé.

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = nx^n(1-x)$.

   a) Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f_n définie sur $[0,1]$ et déterminer $\|f_n\|_\infty$.

   c) Prouver que $\|f_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$.

4. On considère des fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues sur $[0,1]$. On considère les quatre proposition suivantes :

   $\mathcal{P}_1$ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

   $\mathcal{P}_2$ $\forall x \in [0,1],\quad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$

   $\mathcal{P}_3$ $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

   $\mathcal{P}_4$ $\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in [0,1],\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ ,\ n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

   Préciser les implications logiques entre elles (on ne demande pas ici d'étudier si ces propositions sont vraies ou non).

Partie 4 Théorème de Weierstrass

L'objet de cette partie est de démontrer le résultat suivant :
Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, il existe une suite de polynômes réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|f - P_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. a) Soient $a = (a_0, ..., a_n)$ et $b = (b_0, ..., b_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de son produit scalaire canonique. Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à l'aide de a et de b puis le traduire à l'aide des composantes a_0,...,a_n, b_0,...,b_n.

   b) Déduire des résultats de la partie 2 que, pour tout $x \in [0,1]$, on a
   $$\sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

   a) Justifier que f est lipschitzienne.

   b) Montrer qu'il existe un réel c tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{c}{n}$ et conclure.

On admet que ce résultat, démontré dans la cas où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, est encore valable lorsque la fonction est seulement continue sur $[0,1]$. Ce résultat est appelé théorème de Weierstrass.

3. Application. On note $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Pour $(f,g) \in E^2$, on pose $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ et on admet que ceci définit un produit scalaire sur E.
   On note F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales définies sur $[0,1]$ où on identifiera un polynôme et sa fonction polynomiale associée.
   Montrer que $F^\perp = \{0\}$ et exprimer $(F^\perp)^\perp$.