MATHÉMATIQUES

Devoir n°9

Correction

Exercice 1 1. a) $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction sin est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, donc d'après la formule des accroissements finis, il existe $c_x \in]0, x[$ tel que

$$0 \leqslant \sin x = \sin x - \sin 0 = \sin'(c_x)(x-0) = x\underbrace{\cos(c_x)}_{<1} < x.$$

b) $\diamond$ Tout d'abord, on a $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]) =]0, 1] \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par conséquent, tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n$.
$\diamond$ Par ailleurs, la question précédente prouve que $\sin x \leqslant x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (il y a égalité pour $x = 0$) donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = \sin u_n \leqslant u_n.$$

En tant que suite décroissante et minorée (par 0), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Puisqu'on a toujours $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$, par passage à la limite, il vient $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{\pi}{2}$.
$\diamond$ On montre $\ell = 0$. La fonction sin est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc ℓ vérifie la relation $\ell = \sin \ell$. L'inégalité stricte de la question 1a prouve que $\ell \notin \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\ell = 0$.
$\diamond$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en décroissant donc, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge.

2. $\diamond$ On peut écrire $\ln\left(\frac{\sin u_n}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ de telle sorte que $\sum \ln\left(\frac{\sin u_n}{u_n}\right)$ est une série télescopique. Sachant que $u_n \to 0^+$, on a $\ln(u_n) \to -\infty$. Puisque la <u>suite</u> $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, la <u>série</u> $\sum \ln\left(\frac{\sin u_n}{u_n}\right) = \sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ diverge.
$\diamond$ On a $u_n \to 0$ donc

$$\ln\left(\frac{\sin u_n}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - \frac{u_n^3}{3!} + o(u_n^3)}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{3!} + o(u_n^2)\right) = -\frac{u_n^2}{3!} + o(u_n^2)$$
$$\sim -\frac{u_n^2}{3!}.$$

Puisque la série $\sum \ln\left(\frac{\sin u_n}{u_n}\right)$ diverge, le critère d'équivalence pour les séries à termes de signe constant, la série $\sum u_n^2$ diverge.

3. Puisque tous les u_n sont positifs, $\sum |(-1)^n u_n| = \sum u_n$. La question demande la nature de $\sum u_n$. Sachant $u_n \to 0$, il existe un rang à partir duquel on a toujours $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc $0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n$. Puisque la série $\sum u_n^2$ diverge, le critère de comparaison pour les séries à termes positifs assure que $\sum u_n$ diverge, ie $\sum(-1)^n u_n$ n'est pas absolument convergente. Par conséquent, la série $\sum(-1)^n u_n$ est semi-convergente.

Exercice 2 1. On a $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P((F_1 \cap F_2) \cup (P_1 \cap P_2)) = P(F_1 \cap F_2) + P(P_1 \cap P_2) \\ &= P(F_1)P(F_2) + P(P_1)P(P_2) \text{ car les lancers successifs sont indépendants} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \\ P(X_2 = 1) &= P((P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2)) = P(P_1)P(F_2) + P(F_1)P(P_2) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On a $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) &= P((F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3)) = P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ &= P(F_1)P(F_2)P(F_3) + P(P_1)P(P_2)P(P_3) \text{ car les lancers successifs sont indépendants} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}, \\ P(X_3 = 1) &= P((P_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3)) \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}, \\ P(X_3 = 2) &= P((F_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_2)) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. Soit $n \geqslant 2$. D'une part, le gain sera toujours positif et éventuellement nul dans le cas où on obtient toujours face ou toujours pile lors des n lancers. D'autre part, le gain est inférieur au gain obtenu lorsque l'on gagne un euros à chaque lancer, ce qui se produit lorsqu'on alterne successivement les piles et les faces. Dans ce dernier cas, on a $X_n = n - 1$. Tous les autres gains entre 0 et $n - 1$ peuvent clairement se réaliser. On a donc bien X_n qui est à valeurs dans $[\![0, n-1]\!]$.
   On a

$$\begin{aligned} P(X_n = 0) &= P((P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n)) \\ &= P(P_1)P(P_2)\cdots P(P_n) + P(F_1)P(F_2)\cdots P(F_n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}} \\ \text{et } P(X_n = n-1) &= P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots)) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

3. a) On a $E = (F_n \cap F_{n+1}) \cup (P_n \cap P_{n+1})$ donc

$$\begin{aligned} P(E) &= P((F_n \cap F_{n+1}) \cup (P_n \cap P_{n+1})) = P(F_n \cap F_{n+1}) + P(P_n \cap P_{n+1}) \\ &= P(F_n)P(F_{n+1}) + P(P_n)P(P_{n+1}) \text{ car les différents lancers sont indépendants,} \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
   Si les côtés obtenus aux lancers n et $n + 1$ sont les mêmes, pour que le gain soit égal à k après $n + 1$ lancers, il faut que le gain soit déjà égal à k après n lancers. Ainsi, on a

$$P_E(X_{n+1} = k) = P(X_n = k).$$

De la même manière, si les côtés obtenus aux lancers n et $n+1$ sont différents, le gain augmentera de 1 à l'issue du lancer $n+1$. Ainsi, pour que le gain soit égal à k après $n+1$ lancers, il faut que le gain soit égal à $k-1$ après n lancers. Ainsi, on a

$$P_{\overline{E}}(X_{n+1}=k)=P(X_n=k-1).$$

En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(E,\overline{E})$, on a

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=k)&=P(E)P_E(X_{n+1}=k)+P(\overline{E})P_{\overline{E}}(X_{n+1}=k)\\&=\frac{1}{2}P(X_n=k)+\left(1-\frac{1}{2}\right)P(X_n=k-1)\\&=\frac{1}{2}P(X_n=k)+\frac{1}{2}P(X_n=k-1).\end{aligned}$$

4. a) En utilisant les résultats de la question 1, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$Q_2(t)=P(X_2=0)+tP(X_2=1)=\frac{1+t}{2}$$
$$\text{et } Q_3(t)=P(X_3=0)+tP(X_3=1)+t^2P(X_3=2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}t^2=\frac{(1+t)^2}{4}.$$

b) Soit $t\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}Q_{n+1}(t)=&\sum_{k=0}^{n}P(X_{n+1}=k)t^k=P(X_{n+1}=0)+\sum_{k=1}^{n-1}P(X_{n+1}=k)t^k+P(X_{n+1}=n)t^n\\=&\frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{P(X_n=k)+P(X_n=k-1)}{2}t^k+\frac{t^n}{2^n}\text{ grâce aux questions 2 et 3}b,\\=&\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{n-1}}+\sum_{k=1}^{n-1}P(X_n=k)t^k+\sum_{k=1}^{n-1}P(X_n=k-1)t^k+\frac{t^n}{2^{n-1}}\right]\\=&\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n-1}P(X_n=k)t^k+\sum_{k=0}^{n-2}P(X_n=k)t^{k+1}+\frac{t^n}{2^{n-1}}\right]\\=&\frac{1}{2}\left[Q_n(t)+t\left(\sum_{k=0}^{n-2}P(X_n=k)t^k+\frac{t^{n-1}}{2^{n-1}}\right)\right]\\=&\frac{1}{2}\left[Q_n(t)+t\sum_{k=0}^{n-1}P(X_n=k)t^k\right]=\frac{1}{2}\left[Q_n(t)+tQ_n(t)\right]\\=&\frac{1+t}{2}Q_n(t).\end{aligned}$$

c) ⋄ Soit $t\in\mathbb{R}$ fixé. La suite $(Q_n(t))_{n\geqslant 2}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1+t}{2}$ avec $Q_2(t)=\frac{1+t}{2}$ donc :

$$\forall n\geqslant 2,\quad Q_n(t)=\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2}Q_2(t)=\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}$$

⋄ Soit $n\geqslant 2$ fixé. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1}P(X_n=k)t^k=Q_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}}(1+t)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}t^k.$$

En identifiant les coefficients de la fonction polynomiale Q_n, il vient :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad P(X_n = k) = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1-k}.$$

La variable aléatoire X_n suit la loi $\mathcal{B}\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$.

Problème

Partie 1 $(\mathcal{B}_{k,n}(X))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

1. a) On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{0,2}(x) &= \binom{2}{0}(1-X)^2 = 1 - 2X + X^2 \\
\mathcal{B}_{1,2}(x) &= \binom{2}{1} X(1-X) = 2X(1-X) = 2X - 2X^2 \\
\mathcal{B}_{2,2}(x) &= \binom{2}{2} X^2 = X^2
\end{aligned}$$

b) Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in R^3$ tel que

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda_0 \mathcal{B}_{0,2}(X) + \lambda_1 \mathcal{B}_{1,2}(X) + \lambda_2 \mathcal{B}_{2,2}(X) \\
&= \lambda_0(1 - 2X + X^2) + \lambda_1(2X - 2X^2) + \lambda_2 X^2 \\
&= \lambda_0 + 2X(\lambda_1 - \lambda_0) + X^2(\lambda_0 - 2\lambda_1 + \lambda_2).
\end{aligned}$$

On en tire $\begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_0 = 0 \\ \lambda_0 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$

La famille $(\mathcal{B}_{0,2}, \mathcal{B}_{1,2}, \mathcal{B}_{2,2})$ se retrouve être libre, de cardinal 3 égal à $\dim \mathbb{R}_2[X]$: c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

c) Soient $(P, Q, R) \in \mathbb{R}_2[X]^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a :
• Symétrie

$$\begin{aligned}
\langle P, Q \rangle &= P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + \frac{1}{4}\left(4P\left(\frac{1}{2}\right) - P(1) - P(0)\right)\left(4Q\left(\frac{1}{2}\right) - Q(1) - Q(0)\right) \\
&= Q(0)P(0) + Q(1)Q(1) + \frac{1}{4}\left(4Q\left(\frac{1}{2}\right) - Q(1) - Q(0)\right)\left(4P\left(\frac{1}{2}\right) - P(1) - P(0)\right) \\
&= \langle Q, P \rangle.
\end{aligned}$$

• Bilinéarité

$$\begin{aligned}
&\langle \lambda P+\mu Q, R\rangle\\
=&(\lambda P(0)+\mu Q(0))R(0)+(\lambda P(1)+\mu Q(1))R(1)\\
&+\frac{1}{4}\left[4\left(\lambda P\left(\frac{1}{2}\right)+\mu Q\left(\frac{1}{2}\right)\right)-(\lambda P(1)+\mu Q(1))-(\lambda P(0)+\mu Q(0))\right]\times\left[4R\left(\frac{1}{2}\right)-R(1)-R(0)\right]\\
=&\lambda\left[P(0)R(0)+P(1)R(1)+\frac{1}{4}\left(4P\left(\frac{1}{2}\right)-P(1)-P(0)\right)\left(4R\left(\frac{1}{2}\right)-R(1)-R(0)\right)\right]\\
&+\mu\left[Q(0)R(0)+Q(1)R(1)+\frac{1}{4}\left(4Q\left(\frac{1}{2}\right)-Q(1)-Q(0)\right)\left(4R\left(\frac{1}{2}\right)-R(1)-R(0)\right)\right]\\
=&\lambda\langle P,R\rangle+\mu\langle Q,R\rangle.
\end{aligned}$$

Par symétrie, on a immédiatement $\langle R, \lambda P+\mu Q\rangle=\lambda\langle R,P\rangle+\mu\langle R,Q\rangle$.
• Définie positivité

$$\langle P,P\rangle = P(0)^2+P(1)^2+\frac{1}{4}\left(4P\left(\frac{1}{2}\right)-P(1)-P(0)\right)^2\geqslant 0.$$

De plus

$$\begin{aligned}
\langle P,P\rangle=0 &\Leftrightarrow P(0)^2+P(1)^2+\frac{1}{4}\left(4P\left(\frac{1}{2}\right)-P(1)-P(0)\right)^2=0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} P(0)=0\\ P(1)=0\\ 4P\left(\frac{1}{2}\right)-P(1)-P(0)=0\end{cases} \qquad \Leftrightarrow P(0)=P(1)=P\left(\frac{1}{2}\right)=0\\
&\Leftrightarrow 0,\ \frac{1}{2},\ 1 \text{ sont des racines de } P.
\end{aligned}$$

Comme $\deg P\leqslant 2$, le polynôme P ne peut admettre plus de deux racines (comptées avec multiplicité) à moins d'être nul. Par conséquent

$$\langle P,P\rangle=0\Leftrightarrow P=0.$$

• L'application $\langle,\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2. a) Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$, ie $\deg P\leqslant n$. On peut écrire $P(X)=a_nX^n+\cdots+a_1X+a_0$ où a_n est éventuellement nul.
On a $\deg(nXP(X))=1+\deg P\leqslant n+1$ et $\deg(X(1-X)P'(X))=2+\deg(P')=1+\deg P\leqslant n+1$ donc $\deg(\varphi_n(P))\leqslant n+1$. Cependant :
   - l'éventuel terme devant X^{n+1} de $nXP(X)$ est na_n, ie $nXP(X)=na_nX^{n+1}+\cdots+nX$.
   - l'éventuel terme devant X^{n+1} de $X(1-X)P'(X)$ est $-na_nX^{n+1}$.

   Par conséquent, dans $\varphi_n(P)$ les éventuels termes en X^{n+1} se simplifient et on a $\deg(\varphi_n(P))\leqslant n$.

   b) La question précédente justifie que l'application φ_n est définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. Soient $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi_n(\lambda P+\mu Q)&=nX(\lambda P(X)+\mu Q(X))+X(1-X)(\lambda P+\mu Q)'(X)\\
&=nX(\lambda P(X)+\mu Q(X))+X(1-X)(\lambda P'(X)+\mu Q'(X))\\
&=\lambda(nXP(X)+X(1-X)P'(X))+\mu(nXQ(X)+X(1-X)Q'(X))\\
&=\lambda\varphi_n(X)+\mu\varphi_n(Q).
\end{aligned}$$

L'application φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a

$$\begin{aligned}\varphi_n(\mathcal{B}_{k,n}) &= nX\mathcal{B}_{k,n} + X(1-X)\mathcal{B}'_{k,n}\\ &= n\binom{n}{k}X^{k+1}(1-X)^{n-k} + \binom{n}{k}X(1-X)\left[kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}\right]\\ &= \binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}\left[nX + k(1-X) - (n-k)X\right]\\ &= k\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}\\ &= k\mathcal{B}_{k,n}.\end{aligned}$$

3. a) Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $x_i \in \ker(u - \alpha_i \mathrm{id}_E)$ donc $u(x_i) = \alpha_i x_i$. On montre la relation demandée par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.
$\diamond$ Pour $k = 0$, on a par hypothèse :

$$0\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_n x_n = \lambda_0\alpha_0^0 x_1 + \cdots + \lambda_n \alpha_n^0 x_n$$

$\diamond$ On suppose que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $\lambda_0\alpha_0^k x_0 + \cdots + \lambda_n\alpha_n^k x_n = 0$. Par linéarité de u, on peut écrire

$$\begin{aligned}0 = u(0) &= u(\lambda_0\alpha_1^k x_0 + \cdots + \lambda_n\alpha_n^k x_n) = \lambda_0\alpha_0^k u(x_0) + \cdots + \lambda_n\alpha_n^k u(x_n)\\ &= \lambda_0\alpha_0^{k+1}x_0 + \cdots + \lambda_n\alpha_n^{k+1}x_n \qquad \text{car } u(x_0) = \alpha_0 x_0, ..., u(x_n) = \alpha_n x_n\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ que l'on décompose sous la forme $P = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k X^k$. On a

$$\lambda_0 P(\alpha_0)x_0 + \cdots + \lambda_n P(\alpha_n)x_n = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i P(\alpha_i)x_i = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i\left(\sum_{k=0}^{m}a_k\alpha_i^k\right)x_i = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\lambda_i a_k\alpha_i^k x_i$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}a_k\lambda_i\alpha_i^k x_i = \sum_{k=0}^{m}a_k\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\alpha_i^k x_i\right) = \sum_{k=0}^{m}a_k\left(\underbrace{\lambda_0\alpha_0^k x_0 + \cdots + \lambda_n\alpha_n^k x_n}_{=0}\right) = 0$$

c) La relation précédente étant vraie pour tout polynôme P, on choisit les polynômes de Lagrange L_0,...,L_n associés à α_0,..., α_n. Par définition, ceux-ci sont les uniques polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifient

$$L_i(\alpha_i) = 1 \text{ et } L_i(\alpha_j) = 0 \text{ si } j \neq i.$$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On a

$$0 = \lambda_0 L_i(\alpha_0)x_0 + \cdots + \lambda_n L_i(\alpha_n)x_n = \lambda_i x_i.$$

Sachant $x_i \neq 0$, il vient $\lambda_i = 0$. La famille $(x_0, ..., x_n)$ est libre.

4. a) Sachant que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\mathcal{B}_{k,n} \in \ker(\varphi_n - k\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$, la question précédente appliquée avec $\alpha_0 = 0$,...,$\alpha_n = n$ qui sont bien deux à deux distincts, prouve la liberté de la famille $(\mathcal{B}_{k,n}(X))_{0\leqslant k\leqslant n}$. De plus, cette famille est composée de $n+1$ vecteurs avec $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$: c'est base de $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on notera $\mathcal{B}$.
De plus, puisque pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\varphi_n(\mathcal{B}_{k,n})k\mathcal{B}_{k,n}$, il vient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \varphi_n(\mathcal{B}_{0,n}) & \varphi_n(\mathcal{B}_{1,n}) & \cdots & \varphi_n(\mathcal{B}_{n,n}) \\ |_{\mathcal{B}} & |_{\mathcal{B}} & & |_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & (0) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

b) Pour deux polynômes A et B de $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on décompose dans la base $(\mathcal{B}_{k,n}(X))_{0\leqslant k\leqslant n}$ sous la forme

$$A = a_0\mathcal{B}_{0,n} + a_1\mathcal{B}_{k,n} + \cdots + a_n\mathcal{B}_{n,n} \text{ et } B = b_0\mathcal{B}_{0,n} + b_1\mathcal{B}_{k,n} + \cdots + b_n\mathcal{B}_{n,n},$$

il suffit de poser :

$$\langle A, B\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n.$$

Remarque : Puisque 0 (resp. 1) est une racine de tous les $\mathcal{B}_{k,n}$ avec $k \neq 0$ (resp $k \neq n$), on a $a_0b_0 = A(0)B(0)$ et $a_nb_n = A(1)B(1)$.

Partie 2 Préliminaires probabilistes

1. La définition de la variance est $V(X) = E((X - E(X))^2)$. La preuve de la formule de Koenig-Huygens figure dans le cours.

2. a) On sait que $E(S_n) = nt$ et $V(S_n) = nt(1-t)$.

   b) On a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = 1$. Par définition de l'espérance, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} kP(S_n = k) = E(S_n) = nt.$$

   Enfin, grâce à la formule de transfert, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} k^2P(S_n = k) = E(S_n^2) = V(S_n) + (E(S_n))^2 = nt(1-t) + (nt)^2\\ &= n(n-1)t^2 + nt\end{aligned}$$

   c) Soit $t \in [0,1]$. En utilisant les relations obtenues dans la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k}^k (1-t)^{n-k}\\ =&t^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} - \frac{2t}{n}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\\ =& t^2 - \frac{2t}{n}nt + \frac{1}{n^2}[n(n-1)t^2 + nt] = -\frac{1}{n}t^2 + \frac{1}{n}t = \frac{t(1-t)}{n}\end{aligned}$$

Partie 3 Différents types de convergence

1. Soit $t \in [0,1]$ fixé. En utilisant les relations de la partie précédente, on peut écrire

$$\begin{aligned}B_n(f)(t) &= \sum_{k=0}^{n}\left[a\left(\frac{k}{n}\right)^2 + b\left(\frac{k}{n}\right) + c\right]\mathcal{B}_{k,n}(t)\\ &= a\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\mathcal{B}_{k,n}(t) + b\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\mathcal{B}_{k,n}(t) + c\sum_{k=0}^{n}\mathcal{B}_{k,n}(t)\\ &= a\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)t^2 + \frac{1}{n}t\right] + bt + c \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} at^2 + bt + c.\end{aligned}$$

   On vient d'établir $\lim_{n\to+\infty} B_n(f)(t) = at^2 + bt + c = f(t)$.

2. a) Soit $t \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned} B_n(f)(t) &= \sum_{k=0}^{n} e^{\frac{k}{n}} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(te^{\frac{1}{n}}\right)^k (1-t)^{n-k} \\ &= \left(te^{\frac{1}{n}} + 1 - t\right)^n \quad \text{par la formule du binôme de Newton} \\ &= \left(\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)t + 1\right)^n. \end{aligned}$$

b) Soit $t \in [0,1]$ fixé. On a $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis $\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)t + 1 = 1 + \frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Il vient

$$B_n(f)(t) = \left(\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)t + 1\right)^n = e^{n\ln\left(\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)t+1\right)} = e^{n\ln\left(1+\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n\left(\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{t+o(1)}.$$

Par conséquent, pour tout $t \in [0,1]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n(f)(t) = e^t = f(t)$.

3. a) Soit $x \in [0,1]$. Si $x = 1$, on a $f_n(1) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $0 \leqslant x < 1$ alors, par croissances comparées, on a $f_n(x) = nx^n(1-x) = ne^{n\ln x}(1-x)n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Dans tous les cas, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) La fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et vérifie $f_n'(x) = nx^{n-1}(n-(n+1)x)$ ce qui donne le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$	$\searrow$	0

On en déduit $\|f_n\|_\infty = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$. En particulier, pour $n = 1$, on a $\|f_1\|_\infty = \frac{1}{4}$ donc

$$\forall x \in [0,1], \quad x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}.$$

c) On a vu $\|f_n\|_\infty = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$. En posant $m = n+1$ qui tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m = e^{m\ln\left(1-\frac{1}{m}\right)} = e^{m\left(-\frac{1}{m}+o\left(\frac{1}{m}\right)\right)} = e^{-1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$$

Par conséquent, on a bien $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$.

4. On montre $\mathcal{P}_1 \Leftrightarrow \mathcal{P}_3 \Rightarrow \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \mathcal{P}_4$ et que $\mathcal{P}_2$ n'implique pas $\mathcal{P}_3$.
   $\diamond$ Par définition des limites, on a $\mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \mathcal{P}_4$.
   De même, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_3 &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \forall x \in [0,1],\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \mathcal{P}_1\end{aligned}$$

   $\diamond$ Si $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant |f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
   $\diamond$ La question 3 prouve que $\mathcal{P}_2$ n'implique pas $\mathcal{P}_3$. En effet, pour les fonctions de cette question, on a vu que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = f(x)$ où f est la fonction nulle et pourtant $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \neq 0$.

Partie 4 Théorème de Weierstrass

1. a) Soient $a = (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $b = (b_0, ..., b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. En notant $(a|b)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n+1}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$|(a|b)| \leqslant \|a\|\|b\| \Leftrightarrow \left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} b_k^2}$$

   b) Soit $x \in [0,1]$. On déduit le l'inégalité de la question 2c de la partie 2, avec $a_k = \left|x - \frac{k}{n}\right| \sqrt{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$ et $b_k = \sqrt{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$, que

$$\sum_{k=0}^{n} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}} \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$$

$$= \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \times \sqrt{1} \quad \text{(question 2b de la partie 2)}$$

$$\leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

   Cette dernière inégalité provient de la question 3b de la partie 3 où on a établi $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$ sur $[0,1]$. Cette inégalité peut s'établir également en écrivant :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geqslant 0 \Leftrightarrow x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$$

2. a) la fonction f' est continue sur le segment $[0,1]$ donc bornée, ie il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait $|f'(x)| \leqslant M$. La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ avec $|f'|$ majorée par M donc f est M-lipschitzienne (inégalité des accroissements finis).

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,1]$, on peut écrire

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) - f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{=1}\right)f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Par conséquent, par inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} M\left|\frac{k}{n} - x\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \quad \text{car } f \text{ est } M-\text{lipschitzienne}, \\ &\leqslant \frac{M}{2\sqrt{n}} \text{ grâce au résultat de la question 1b.} \end{aligned}$$

Cette majoration étant valable pour tout $x \in [0,1]$, il vient $\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{c}{n}$ en posant $c = M/2$.
Enfin, puisque $\frac{c}{n} \to 0$, le théorème des gendarmes prouve $\|B_n(f) - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. On a immédiatement $\{0\} \subset F^\perp$. Pour la deuxième inclusion, soit $f \in F^\perp$, ie

$$\forall P \in F, \quad \langle P, f\rangle = 0.$$

D'après le théorème de Weiestrass, il existe une suite (P_n) de fonctions polynomiales telle que $\|P_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On montre que

$$\langle P_n, f\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle f, f\rangle, \text{ ie } \int_0^1 P_n(t)f(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)^2 dt.$$

En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 P_n(t)f(t)dt - \int_0^1 f(t)^2dt\right| = \left|\int_0^1 (P_n(t) - f(t))f(t)dt\right| &\leqslant \int_0^1 \underbrace{|P_n(t) - f(t)|}_{\leqslant \|P_n - f\|_\infty}|f(t)|dt \\ &\leqslant \underbrace{\|P_n - f\|_\infty}_{\to 0}\underbrace{\int_0^1 |f(t)|dt}_{=c^{ste}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, f étant orthogonale à toutes les fonctions polynômiales, on a $\langle P_n, f\rangle = \int_0^1 P_n(t)f(t)dt = 0$ pour tout entier n. Par unicité de la limite, il vient

$$\int_0^1 f(t)^2 dt = 0.$$

La fonction f^2 étant continue, positive et d'intégrale nulle, la fonction f^2 est la fonction nulle, ie $f(t)^2 = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. On a alors, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = 0$, ie $f = 0_E$.
Par double inclusion, on obtient $F^\perp = \{0\}$ puis $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E$. En particulier, on remarque que $(F^\perp)^\perp \neq E$.