MATHÉMATIQUES

Devoir n°8

Correction

Exercice 1 Voir TD Intégration.

Problème 1

Partie 1 Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. a) L'application f_A est bien à valeurs dans $\mathbb{K}$ (car tr l'est).
Soient $(M_1, M_2) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f_A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) &= \mathrm{tr}(A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)) = \mathrm{tr}(\lambda_1 AM_1 + \lambda_2 AM_2) \\ &= \lambda_1 \mathrm{tr}(AM_1) + \lambda_2 \mathrm{tr}(AM_2) \text{ par linéarité de la trace} \\ &= \lambda_1 f_A(M_1) + \lambda_2 f_A(M_2) \end{aligned}$$

Par conséquent, l'application f_A est une forme linéaire de E.

b) On rappelle que, pour tout $(i, j, k, \ell) \in [\![1, n]\!]^4$, on a $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On peut écrire $A = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}E_{k,\ell}$ puis

$$AE_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}E_{k,\ell}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} \underbrace{\delta_{\ell,i}E_{k,j}}_{=0 \text{ si } \ell \neq i} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j} = \begin{pmatrix} & a_{1,i} & \\ (0) & \vdots & (0) \\ & a_{n,i} & \end{pmatrix}.$$

La seule colonne non nulle de cette matrice étant la colonne j. Il vient

$$f_A(E_{i,j}) = \mathrm{tr}(AE_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} \underbrace{\mathrm{tr}(E_{k,j})}_{=0 \text{ si } k \neq j} = a_{j,i}\mathrm{tr}(E_{j,j}) = a_{j,i}.$$

c) On suppose que f_A est l'application nulle, ie pour toute matrice $M \in E$, $f_A(M) = 0$. En particulier, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a

$$a_{i,j} = f_A(E_{j,i}) = 0.$$

La matrice A a tous ses coefficients qui sont nuls : A est la matrice nulle.

2. a) Soient $(A_1, A_2) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Pour toute matrice $M \in E$, on a

$$\begin{aligned} f_{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}(M) &= \mathrm{tr}((\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)M) = \mathrm{tr}(\lambda_1 A_1 M + \lambda_2 A_2 M) \\ &= \lambda_1 \mathrm{tr}(A_1 M) + \lambda_2 \mathrm{tr}(A_2 M) = \lambda_1 f_{A_1}(M) + \lambda_2 f_{A_2}(M) \end{aligned}$$

donc

$$f(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = f_{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2} = \lambda_1 f_{A_1} + \lambda_2 f_{A_2} = \lambda_1 f(A_1) + \lambda_2 f(A_2).$$

L'application f est une application linéaire.

b) ⋄ L'application f est définie sur E à valeurs dans E^* (question 1a).
⋄ L'application f est injective. En effet, si $A \in \ker f$ alors $f(A) = 0_{E^*}$, ie f_A est l'application nulle. On déduit de la question 1c que $A = 0_E$ donc $\ker f \subset \{0\}$ (l'autre inclusion est toujours vraie).
⋄ On a $\dim(E^*) = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = (\dim E) \times \underbrace{(\dim \mathbb{K})}_{=1} = \dim E$.

En tant qu'application linéaire injective entre deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie, l'application f est un isomorphisme.

Partie 2 Applications

1. Soit ϕ une forme linéaire de E, ie $\phi \in E^*$, telle que

$$\forall (M, N) \in E^2, \quad \phi(MN) = \phi(NM).$$

a) On a vu que $f : E \to E^*$ est bijective. Puisque $\phi \in E^*$, il existe une unique matrice $A \in E$ telle que $\phi = f(A) = f_A$, ie

$$\forall N \in E, \quad \phi(N) = f_A(N) = \mathrm{tr}(AN).$$

b) Soit $M \in E$. Pour tout matrice $N \in E$, on a

$$\begin{aligned} f_{AM-MA}(N) &= \mathrm{tr}((AM - MA)N) = \mathrm{tr}(AMN) - \mathrm{tr}(M(AN)) = \mathrm{tr}(AMN) - \mathrm{tr}(ANM) \\ &= f_A(MN) - f_A(NM) = \phi(MN) - \phi(NM) = 0. \end{aligned}$$

L'application f_{AM-MA} est nulle. On déduit de la question que 1c que $AM - MA$ est la matrice nulle, ie $AM = MA$. Les matrices M et A commutent et ceci, pour toute matrice $M \in E$.

c) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. D'après la question précédente, on a $AE_{i,j} = E_{i,j}A$. On a déjà vu que $AE_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$. On montre de même que :

$$E_{i,j}A = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}E_{i,j}E_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{j,\ell}E_{i,\ell} = \begin{pmatrix} & (0) & \\ & & \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ & (0) & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \end{array}$$

L'égalité $AE_{i,j} = E_{i,j}A$ donne alors :

- En identifiant les termes sur la ligne i/colonne j, il vient $a_{j,j} = a_{i,i}$.
- À l'exception du terme sur la colonne j, tous les termes de la ligne i de $E_{i,j}A$ sont nuls :

$$\forall \ell \in [\![1, n]\!], \ \ell \neq j, \quad a_{j,\ell} = 0.$$

- À l'exception du terme sur la ligne i, tous les termes de la colonne j de $AE_{i,j}$ sont nuls :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ k \neq i, \quad a_{k,i} = 0.$$

Par conséquent, tous les termes diagonaux de A sont égaux et les termes non-diagonaux sont nuls : la matrice A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n.$$

En reprenant le résultat de la question 1a, pour toute matrice $N \in E$, on a

$$\phi(N) = f_A(N) = \mathrm{tr}(AN) = \mathrm{tr}(\lambda N) = \lambda \mathrm{tr}(N)$$

donc $\phi = \lambda \mathrm{tr}$.

2. a) Soit $r \in [\![0, n]\!]$. On note

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Les colonnes de Y sont linéairement indépendantes donc $\mathrm{rg}(Y) = n$ et Y est inversible. Tous les coefficients diagonaux de $J_rY = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & (0) \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & (0) & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nuls donc $\mathrm{tr}(J_rY) = 0$.

b) H est un hyperplan donc c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E. Ainsi, il existe $\phi \in E^*$ non nulle telle que $H = \ker \phi$.
Puisque $f : E \to E^*$ est bijective, il existe une unique matrice $A \in E$ telle que $\phi = f(A) = f_A$.
On peut ainsi écrire $H = \ker \phi = \ker f_A$ et

$$M \in H = \ker f_A \Leftrightarrow f_A(M) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr}(AM) = 0.$$

En notant $r = \mathrm{rg}(A)$, il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K})^2$ tel que $J_r = Q^{-1}AP$, ie $A = QJ_rP^{-1}$.
On considère la matrice $Y \in GL_n(\mathbb{K})$ de la question précédente et on note $M = PYQ^{-1}$, ie $Y = P^{-1}MQ$. La matrice M est inversible en tant que produit de matrices inversibles et vérifie

$$\mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(QJ_rP^{-1}M) = \mathrm{tr}(Q(J_rP^{-1}M)) = \mathrm{tr}(J_rP^{-1}MQ) = \mathrm{tr}(J_rY) = 0.$$

Par conséquent, la matrice M est une matrice inversible qui appartient à $\ker(f_A) = H$.

Problème 2

Partie 1 Une application linéaire

1. Soient $A \in \mathbb{C}_{q-1}[X]$ et $B \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$. En tant que somme et produits de polynômes, $AP + BQ$ est un polynôme. De plus, on a $\deg A \leqslant q - 1$ et $\deg B \leqslant p - 1$ donc

$$\deg(AP + BQ) \leqslant \max\{\deg(AP), \deg(BQ)\} = \max\{\underbrace{p + \deg A}_{\leqslant p+q-1}, \underbrace{q + \deg B}_{\leqslant q+p-1}\} \leqslant p + q - 1.$$

On a prouvé $AP + BQ \in \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

2. Soient $(A_1, B_1) \in \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$, $(A_2, B_2) \in \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$. On a

$$\begin{aligned} & u(\lambda_1(A_1, B_1) + \lambda_2(A_2, B_2)) = u(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) \\ =& (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)P + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)Q = \lambda_1(A_1P + B_1Q) + \lambda_2(A_2P + B_2Q) \\ =& \lambda_1 u(A_1, B_1) + \lambda_2 u(A_2, B_2). \end{aligned}$$

L'application u est linéaire.

3. On a $\dim F = \dim \mathbb{C}_{p+q-1}[X] = p+q$ et $\dim E = \dim \mathbb{C}_{q-1}[X] + \dim \mathbb{C}_{p-1}[X] = q+p$. Par conséquent, on a $\dim E = \dim F$.

4. Si u est bijective alors u est surjective. Il existe $(A,B) \in \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ tel que
$$1 = u(A,B) = AP + BQ.$$
Grâce au théorème de Bézout, les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

5. On suppose P et Q premiers entre eux.
   a) Soit $(A,B) \in \ker u$. On a $0 = u(A,B) = AP + BQ$ ce qui donne $-AP = BQ$ puis $P|BQ$. Sachant $P \wedge Q = 1$, on déduit du lemme de Gauss que $P|B$. Par ailleurs, on a $\deg P = p$ et $\deg B \leqslant p-1$ donc $B = 0$. Ainsi $AP = -BQ = 0$ et $P \neq 0$ donc $A = 0$ par intégrité de l'anneau $\mathbb{C}[X]$. On a prouvé $(A,B) = 0_E$.
   L'inclusion $\{0_E\} \subset \ker u$ est immédiate donc $\ker u = \{0_E\}$.
   b) On a $u : E \to F$ qui est injective avec $\dim E = \dim F = p+q$ donc u est bijective. On déduit des questions précédentes l'équivalence :
$$u \text{ est bijective} \Leftrightarrow P \text{ et } Q \text{ sont premiers ente eux}$$

Partie 2 Vers le résultant de deux polynômes

1. Par définition, on a
$$M(P,Q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u(1,0) & u(X,0) & u(0,1) & u(0,X) \\ |_{\mathcal{C}} & |_{\mathcal{C}} & |_{\mathcal{C}} & |_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}.$$
Or $u(1,0) = P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + 0 \times X^3$ et $u(X,0) = XP = 0 \times 1 + a_0X + a_1X^2 + a_2X^3$ donc $\begin{array}{c} | \\ u(1,0) \\ |_{\mathcal{C}} \end{array} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{array}{c} | \\ u(X,0) \\ |_{\mathcal{C}} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.
De même, on a $u(0,1) = Q$ et $u(0,X) = XQ$ donc $\begin{array}{c} | \\ u(1,0) \\ |_{\mathcal{C}} \end{array} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{array}{c} | \\ u(0,X) \\ |_{\mathcal{C}} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.
Par conséquent, on obtient
$$M(P,Q) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

2. Puisque P et Q sont à coefficients complexes, on sait :
$$\begin{aligned} P \text{ et } Q \text{ ont une racine commune} &\Leftrightarrow P \wedge Q \neq 1 \\ &\Leftrightarrow u \text{ n'est pas bijective (voir Partie 1)} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}(u) \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow M(P,Q) \text{ n'est pas inversible.} \end{aligned}$$

3. On généralise la question 1.

$$M(P,Q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ u(1,0) & u(X,0) & \cdots & u(X^{q-1}) & u(0,1) & u(0,X) & \cdots & u(0,Q^{p-1}) \\ |_{\mathcal{C}} & |_{\mathcal{C}} & & |_{\mathcal{C}} & |_{\mathcal{C}} & |_{\mathcal{C}} & & |_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier $j \in [\![0, q-1]\!]$, la colonne $j+1$ de $M(P,Q)$ correspond aux coordonnées dans la base canonique de $u(X^j, 0) = X^j P = a_0 X^j + a_1 X^{j+1} + \cdots + a_p X^{j+p}$.
Pour tout entier $j \in [\![q, p+q-1]\!]$, la colonne $j+1$ de $M(P,Q)$ correspond aux coordonnées dans la base canonique de $u(0, X^j) = X^j Q = b_0 X^j + b_1 X^{j+1} + \cdots + b_q X^{j+q}$.
Par conséquent, on obtient :

$$M(P,Q) = \begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & a_0 & & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & & \vdots \\ & & a_p & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & & b_q \end{pmatrix}.$$

Partie 3 Application aux nombres algébriques

1. Un rationnel x s'écrit sous la forme $x = \frac{n}{m}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}^*$:

$$x = \frac{n}{m} \Leftrightarrow mx - n = 0$$

Le réel x est une racine de $mX - n \in \mathbb{Z}[X]$ donc est algébrique.

2. En posant $P = X^2 - 3$ et $Q = X^2 - 7$, on a $P(\sqrt{3}) = 0$ et $Q(\sqrt{7}) = 0$. Les réels $\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}$ étant irrationnels, on ne peut pas trouver P et Q de degré 1.

3. On montre que $\sqrt{3}$ est une racine de P et de Q_a. On a $P(\sqrt{3}) = 0$ et

$$Q_a(\sqrt{3}) = Q(a - \sqrt{3}) = Q(\sqrt{7}) = 0.$$

4. On a $P = X^2 - 3$ et $Q_a = (X-a)^2 - 7 = X^2 - 2aX + a^2 - 7$. Grâce à l'expression de $M(P,Q)$ obtenue dans la question 1 de la partie 2, on peut écrire

$$M(P,Q_a) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & a^2-7 & 0 \\ 0 & -3 & -2a & a^2-7 \\ 1 & 0 & 1 & -2a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & a^2-7 & 0 \\ 0 & -3 & -2a & a^2-7 \end{pmatrix}_{\substack{L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_4}}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & -6a \\ 0 & 0 & -2a & a^2-4 \end{pmatrix}_{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2}} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{a^3}{2} - 8a \\ 0 & 0 & -2a & a^2-4 \end{pmatrix}_{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{a}{2} L_4}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{a^3}{2} - 8a \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a^4}{4} + 5a^2 - 4 \end{pmatrix}_{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{a}{2} L_3}$$

5. On a vu que P et Q_a ont une racine commune donc, en utilisant le résultat de la question 2 de la partie 2, il vient

$$\begin{aligned}
& M(P,Q) \text{ non inversible} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{a^3}{2} - 8a \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a^4}{4} + 5a^2 - 4 \end{pmatrix} \text{ non inversible} \quad \left(\substack{\text{les opérations élémentaires préservent le rang} \\ \text{donc l'inversibilité}}\right), \\
\Leftrightarrow & -\frac{a^4}{4} + 5a^2 - 4 = 0 \quad \left(\substack{\text{une matrice triangulaire est inversible} \\ \text{ssi ses coefficients diagonaux sont non nuls}}\right) \\
\Leftrightarrow & a^4 - 20a^2 + 16 = 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le réel $a = \sqrt{3} + \sqrt{7}$ est un nombre algébrique en tant que racine du polynôme $X^4 - 20X^2 + 16$.

6. La question 1 prouve $\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}}$. Par ailleurs, on peut écrire :

- $1 \in \overline{\mathbb{Q}}$ car 1 est racine de $X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$,
- $\overline{\mathbb{Q}}$ est stable par $+$ (admis),
- Si $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, il existe $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x) = 0$. En notant $\tilde{P} = a_0 - a_1 X + a_2 X^2 - \cdots + (-1)^p X^p = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k (-1)^k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, on a

$$\tilde{P}(-x) = \sum_{k=0}^{p} a_k (-1)^k (-x)^k = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k = P(x) = 0$$

  donc $-x \in \overline{\mathbb{Q}}$.
- $\overline{\mathbb{Q}}$ est stable par $\times$ (admis).

L'ensemble $\overline{\mathbb{Q}}$ est un sous-anneau. Par ailleurs, si $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ est non nul et si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ vérifie $P(x) = 0$ alors, en factorisant par x^p, il vient

$$a_0 \left(\frac{1}{x}\right)^p + a_1 \left(\frac{1}{x}\right)^{p-1} + \cdots + a_{p-1} \frac{1}{x} + a_p = 0.$$

Autrement dit, $\frac{1}{x}$ est racine de $a_0 X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_{p-1} X + a_p \in \mathbb{Z}[X]$ donc $\frac{1}{x} \in \overline{\mathbb{Q}}$. Par conséquent, $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps contenant $\mathbb{Q}$.

Problème 3

Partie 1 Quelques exemples

1. Soit $x \in I$. On a

$$T(f_1)(x) = \int_0^x \frac{a}{1+t} dt = [a \ln(1+t)]_0^x = a \ln(1+x).$$

2. Soit $x \in I$. On a

$$T(f_2)(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t} dt = \left[\frac{1}{2}(\ln(1+t))^2\right]_0^x = \frac{1}{2}(\ln(1+x))^2.$$

3. a) Puisque $\deg \frac{X}{(X+1)(X+2)^2} = -2 < 0$, on sait qu'il existe des réels a, b et c tels que

$$\frac{X}{(X+1)(X+2)^2} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2}.$$

b) Grâce à la méthode du cache, on détermine

$$a = \left.\frac{x}{(x+2)^2}\right|_{x=-1} = -1 \quad \text{et} \quad c = \left.\frac{x}{x+1}\right|_{x=-2} = 2.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'égalité $\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{ax}{x+1} + \frac{bx}{x+2} + \frac{cx}{(x+2)^2}$, il vient

$$0 = a + b + 0 \Leftrightarrow b = -a = 1.$$

c) Soit $x \in I$. On a :

$$\begin{aligned} T(f_3)(x) &= \int_0^x \frac{t}{(t+1)(t+2)^2} dt = \int_0^x \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2} + \frac{c}{(t+2)^2} dt \\ &= \left[a\ln(1+t) + b\ln(t+2) - \frac{c}{t+2}\right]_0^x = a\ln(1+x) + b\ln(2+x) - \frac{c}{x+2} - b\ln 2 + \frac{c}{2} \\ &= \ln(2+x) - \ln(1+x) - \frac{2}{x+2} - \ln 2 + 1 = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) - \frac{2}{x+2} - \ln 2 + 1 \end{aligned}$$

d) En utilisant $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$ et $\frac{1}{1+u} = 1 - u + \underset{u\to 0}{o}(u)$, il vient :

$$\begin{aligned} T(f_3)(x) &= \ln\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) - \frac{2}{x+2} - \ln 2 + 1 \\ &= 1 - \ln 2 + \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x}\frac{1}{1+\frac{2}{x}} \qquad \left(\text{on a } \frac{2}{x} \to 0 \text{ et } \frac{1}{x} \to 0\right) \\ &= 1 - \ln 2 + \left(\frac{2}{x} - \frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2}{2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{x} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - \frac{2}{x}\left(1 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= 1 - \ln 2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Partie 2 Propriétés algébriques élémentaires de T

1. Soit $f \in E$. Pour tout $x > -1$, la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t}$ est continue sur $[\min(0,x), \max(0,x)]$ donc $x \mapsto Tf(x)$ est bien définie sur $]-1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Grâce au théorème fondamental de l'analyse, la fonction $T(f)$ est dérivable sur I donc continue sur I. On a bien $T(f) \in E$.
Par ailleurs, par linéarité de l'intégrale, T est une application linéaire, définie sur E et à valeurs dans E : T est un endomorphisme de E.

2. Soit $f \in E$. On a $T(f)(0) = \int_0^0 \frac{f(t)}{1+t}dt = 0$. Grâce au théorème fondamental de l'analyse (voir question précédente), $T(f)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a $T(f)'(x) = \frac{f(x)}{1+x}$. En particulier, la fonction $T(f)'$ est continue en tant que quotient de fonctions continues sur I.

3. Soit $f \in \ker T$. On a $T(f) = 0_E =$ fonction nulle. En dérivant, on obtient, $T(f)' = 0$ donc :
$$\forall x \in I, \quad \frac{f(x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I, \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow f = 0_E.$$
On obtient l'inclusion $\ker T \subset \{0\}$. L'autre inclusion est toujours vraie donc $\ker T = \{0\}$.

4. La question 2 justifie $\mathrm{Im}(T) \subset \{g : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $g(0) = 0\}$.
Réciproquement, soit $g : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $g(0) = 0$. On note $f : I \to (1+t)g'(t)$. La fonction f est continue sur I en tant que produit de fonctions continues sur I, ie $f \in E$, et
$$\forall x \in I, \ T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t}dt = \int_0^x g'(t)dt = [g(t)]_0^x = g(x) - g(0) = g(x).$$
Autrement dit, on a $g = T(f) \in \mathrm{Im}(T)$. Par double inclusion, on conclut :
$$\mathrm{Im}(T) = \{g : I \to \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \text{ avec } g(0) = 0\}$$

Partie 3 Comportement à l'infini

1. On suppose dans cette question que $\ell = 0$.

   a) On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} ft) = 0$ donc, pour $\varepsilon = 1$,
   $$\exists A > 0, \quad \forall x \geqslant A, \quad |f(t) - 0| \leqslant 1.$$
   La fonction $f_{|[0,A]}$ est continue sur le segment $[0, A]$ donc bornée sur ce segment. Ainsi, il existe $K > 0$ tel que
   $$\forall t \in [0, A], \quad |f(t)| \leqslant K.$$
   En notant $K' = \max\{1, K\}$, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on peut écrire
   $$|f(t)| \leqslant \begin{cases} K \leqslant K' \text{ si } t \in [0, A] \\ 1 \leqslant K' \text{ si } t \in]A, +\infty[\end{cases}.$$
   La fonction f se retrouve être bornée sur $[0, +\infty[$.

   b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que
   $$\forall t \geqslant A, \quad |f(t)| \leqslant \varepsilon.$$
   Par ailleurs, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc il existe $B > 0$ tel que
   $$\forall x \geqslant B, \quad \ln x \geqslant A.$$
   Soit $x \geqslant \max\{B, 1\}$. Pour tout $t \in [\ln x, x]$, on a $t \geqslant \ln x \geqslant A$ donc $|f(t)| \leqslant \varepsilon$. En particulier, il vient $0 \leqslant \alpha(x) = \sup\{|f(t)|, \quad \ln(x) \leqslant t \leqslant x\} \leqslant \varepsilon$.
   On a prouvé :
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B' = \max\{B, 1\} > 0, \quad \forall x \geqslant B' \quad |\alpha(x)| \leqslant \varepsilon$$
   Ceci est la définition de $\alpha(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Soit $x \geqslant 1$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
|T(f)(x)| &= \left| \int_0^{\ln x} \frac{f(t)}{1+t} dt + \int_{\ln x}^{x} \frac{f(t)}{1+t} dt \right| \quad \text{(relation de Chasles)} \\
&\leqslant \int_0^{\ln x} \underbrace{\frac{|f(t)|}{1+t}}_{\leqslant \frac{M}{1+t}} dt + \int_{\ln x}^{x} \underbrace{\frac{|f(t)|}{1+t}}_{\leqslant \frac{\alpha(x)}{1+t}} dt \quad \text{(inégalités triangulaires)} \\
&\leqslant M \int_0^{\ln x} \frac{1}{1+t} dt + \alpha(x) \int_{\ln x}^{x} \frac{1}{1+t} dt \quad \text{(croissance de l'intégrale).}
\end{aligned}$$

d) Partant du résultat de la question précédente, il vient

$$|T(f)(x)| \leqslant M \int_0^{\ln x} \frac{dt}{1+t} + \alpha(x) \int_{\ln x}^{x} \frac{dt}{1+t} = M \ln(1+\ln x) + \alpha(x)(\ln(1+x) - \ln(1+\ln x))$$

On a $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$ et par croissances comparées, on sait $\lim\limits_{u=\ln x \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ donc

$$\frac{|T(f)(x)|}{\ln x} \leqslant M \underbrace{\frac{\ln(1+\ln x)}{\ln x}}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\alpha(x)}_{\longrightarrow 0} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}}_{\longrightarrow 1} - \alpha(x) \underbrace{\frac{\ln(1+\ln x)}{\ln x}}_{\longrightarrow 0} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{T(f)(x)}{\ln x} = 0$, ie $T(f)(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(\ln x)$.

2. On a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc $f(x) - \ell \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La question précédente prouve $T(f-\ell)(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(\ln x)$. Par linéarité de T et en utilisant le résultat de la question 1 de la partie 1, il vient

$$T(f)(x) - \ell \ln(1+x) = T(f-\ell)(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(\ln x)$$

donc $T(f)(x) = \ell \ln x + \underset{x\to+\infty}{o}(\ln x)$, ie $T(f)(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell \ln x$.

3. On peut montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} T(f)(x) = +\infty$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, en passant par $-f$, on a immédiatement $\lim\limits_{x\to+\infty} T(f)(x) = -\infty$.
Comme les équivalents préservent les limites, le résultat de la question précédente prouve que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} T(f)(x) = (\text{signe de } \ell)\infty$.
Dans le cas où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on a vu dans la partie 1 des cas où $T(f)$ admet une limite finie (cas de la fonction f_3), il existe des cas où $T(f)$ tend vers $+\infty$ (prendre $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)}$).
Toutes les situations décrites vont dans le sens de l'affirmation proposée. Cependant, en considérant $f : t \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]-1, e-1[\\ \frac{\cos(\ln(\ln(1+t)))}{\ln(1+t)} \text{ si } x \geqslant e-1 \end{cases}$, la fonction f est continue sur I, tend vers 0 en $+\infty$ et vérifie

$$T(f)(x) = \underbrace{\int_0^{e-1} \frac{1}{1+t} dt}_{=c^{ste}} + \int_{e-1}^{x} \frac{\cos(\ln(\ln(1+t))}{(1+t)\ln(1+t)} dt = 1 + [\sin(\ln(\ln(1+t)))]_{e-1}^{x} = 1 + \sin(\ln(\ln(1+x))).$$

Dans cet exemple, $T(f)$ est bornée mais n'admet pas de limite en $+\infty$ bien que f tende vers 0 en $+\infty$. L'affirmation proposée est fausse.