MATHÉMATIQUES

Devoir n°8

Vendredi 5 Mai 2023

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants dans l'appréciation des copies. **En particulier, il est indispensable de conclure vos réponses et d'encadrer vos résultats à la règle.**

On pourra admettre le résultat d'une question après l'avoir mentionné explicitement sur sa copie.

Questions de cours :

- Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ d'une fraction rationnelle de la forme $\frac{P'}{P}$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$.
- Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.
- Énoncer la formule de changement de base pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie.

Exercice 1 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Problème 1 Dans tout ce problème, on considère un entier $n \geqslant 2$ et on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
Étant donnée une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$, on appelle trace de A, notée $\mathrm{tr}(A)$, la somme de ses coefficients diagonaux. On rappelle que :

$$\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\quad \mathrm{tr}(\lambda M+\mu N) = \lambda\mathrm{tr}(M)+\mu\mathrm{tr}(N) \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$$

Partie 1 Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée. On note

$$f_A : \begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ M \mapsto \mathrm{tr}(AM) \end{cases}.$$

   a) Montrer que $f_A \in E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.
   b) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Montrer que $f_A(E_{i,j}) = a_{j,i}$.
   c) En déduire que si f_A est l'application nulle alors A est la matrice nulle.

2. On note $f : \begin{cases} E \to E^* \\ A \mapsto f_A \end{cases}$.

   a) Montrer que f est une application linéaire.

   b) Démontrer que f est un isomorphisme.

Partie 2 Applications

1. Soit ϕ une forme linéaire de E, ie $\phi \in E^*$, telle que

$$\forall (M,N) \in E^2, \quad \phi(MN) = \phi(NM).$$

   a) Justifier qu'il existe un unique $A \in E$ tel que $\phi = f_A$.

   b) Démontrer que, pour tout $M \in E$, l'application f_{AM-MA} est nulle. Qu'en conclure concernant les matrices A et M ?

   c) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$ puis identifier ϕ.

2. Soit H un hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$.

   a) Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Trouver une matrice $Y \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $\mathrm{tr}(J_r Y) = 0$.

   b) Montrer que H contient une matrice inversible.

Problème 2 Soient p et q deux entiers naturels non nuls. On considère deux polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ avec $\deg P = p$ et $\deg Q = q$.

On définit une fonction u par

$$u : \begin{cases} \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X] \to \mathbb{C}_{p+q-1}[X] \\ (A,B) \mapsto AP + BQ \end{cases}.$$

1. (Question de cours) Montrer que P et Q ne sont pas premiers entre eux si et seulement si ils ont une racine commune.

Partie 1 Une application linéaire

1. Justifier que u est bien à valeurs dans $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

2. Montrer que u est linéaire.

3. Préciser les dimensions de $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ et $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$.

4. Montrer que si u est bijective alors P et Q sont premiers entre eux.

5. On suppose P et Q premiers entre eux.

   a) Montrer que $\ker u = \{0_E\}$.

   b) En déduire que u est bijective. Quelle conclusion tirer des questions 4 et 5 ?

Partie 2 Vers le résultant de deux polynômes

On note $\mathcal{B} = ((1,0),(X,0),...,(X^{q-1},0),(0,1),(0,X),...,(0,X^{p-1}))$ une base de E et $\mathcal{C} = (1,X,...,X^{p+q-1})$ la base canonique de F. Par ailleurs, on note $M(P,Q)$ la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, ie

$$M(P,Q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}(u).$$

1. Dans cette question uniquement, on suppose $p = q = 2$ et on note $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$. Justifier que

$$M(P,Q) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

2. Pour p et q quelconques, montrer que les polynômes P et Q ont une racine commune si et seulement si $M(P,Q)$ n'est pas inversible.

3. Si $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$ et $Q = b_0 + b_1X + \cdots + b_qX^q$, expliciter la matrice $M(P,Q)$.

Partie 3 Application aux nombres algébriques

Un nombre complexe est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers. On note $\overline{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques. Cette partie se propose de voir comment prouver que $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps contenant $\mathbb{Q}$.

1. Montrer qu'un nombre rationnel est algébrique.

2. Déterminer deux polynômes P et Q à coefficients entiers tels que $P(\sqrt{3}) = 0$ et $Q(\sqrt{7}) = 0$. *On prendra P et Q unitaires de degré minimal.*

3. On note $a = \sqrt{3} + \sqrt{7}$ et $Q_a = Q(a - X) \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que P et Q_a ont une racine commune.

4. Par opérations élémentaires sur les lignes, montrer que l'on peut passer de $M(P,Q_a)$ à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{a^3}{2} - 8a \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a^4}{4} + 5a^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

5. En déduire que $a = \sqrt{3} + \sqrt{7}$ est un nombre algébrique.

La technique utilisée dans la question précédente se généralise et permet de montrer que si α et β sont deux nombres algébriques alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont aussi algébriques. On admet ce résultat.

6. Montrer que $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps contenant $\mathbb{Q}$.

Problème 3 On note $E = \mathcal{C}^0(]-1,+\infty[,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $I =]-1,+\infty[$. Étant donné un élément f de E, on désigne par $T(f)$ l'application de I vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in I, \quad T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t} dt.$$

Partie 1 Quelques exemples

1. Déterminer $T(f_1)$ où f_1 est l'application constante égale à $a \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer $T(f_2)$ où f_2 est l'application $f_2 : t \mapsto \ln(1+t)$.
3. On considère l'application f_3 définie sur I par $f_3 : t \mapsto \frac{t}{(t+2)^2}$.
   a) Donner la forme de la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{X}{(X+1)(X+2)^2}$.
   b) Déterminer les coefficients de cette décomposition.
   c) En déduire que, pour tout $x \in I$, on a $T(f_3)(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right) - \dfrac{2}{x+2} - \ln 2 + 1$.
   d) Donner un développement asymptotique à la précision $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ de $T(f_3)(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Partie 2 Propriétés algébriques élémentaires de T

1. Montrer que si $f \in E$ alors $T(f) \in E$. En déduire que T est un endomorphisme de E.
2. Soit $f \in E$. Préciser $T(f)(0)$ et démontrer que $T(f)$ est dérivable (on donnera $T(f)'$).
3. Déterminer le noyau de T.
4. Déterminer l'image de T.

Partie 3 Comportement à l'infini

On considère un élément $f \in E$ et on suppose que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$.

1. On suppose dans cette question que $\ell = 0$.
   a) Montrer que la fonction f est bornée sur $[0,+\infty[$. On note alors $M = \sup\limits_{t\in[0,+\infty[} |f(t)|$.
   b) Pour $x \geqslant 1$, on pose $\alpha(x) = \sup\{|f(t)|, \quad \ln(x) \leqslant t \leqslant x\}$. Montrer que $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   c) Montrer, pour tout $x \geqslant 1$, que $|T(f)(x)| \leqslant M \displaystyle\int_0^{\ln x} \frac{dt}{1+t} + \alpha(x) \int_{\ln x}^x \frac{dt}{1+t}$.
   d) En déduire $T(f)(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(\ln x)$.
2. On suppose dans cette question que ℓ est un réel non nul. Trouver un équivalent simple de $T(f)(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Que penser de l'affirmation : "Si f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $+\infty$ alors $T(f)(x)$ admet également une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$" ?