MATHÉMATIQUES

Devoir n°7

Correction

Exercice 1 1. On a $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)$ et $\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)$ donc

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+h)}{1+h} &= \left(1 - h + h^2 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)\right)\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)\right)\\ &= h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - h\left(h - \frac{h^2}{2}\right) + h^2h + \underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)\\ &= h - \frac{3}{2}h^2 + \frac{11}{6}h^3 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right).\end{aligned}$$

2. On pose $x = 1+h$. On a $f(x) = f(1+h) = xx^{\frac{1}{x}} = (1+h)e^{\frac{\ln(1+h)}{1+h}}$.
On utilise $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3!} + \underset{u\to 0}{o}\left(u^3\right)$ donc

$$\begin{aligned}e^{\frac{\ln(1+h)}{1+h}} &= e^{h - \frac{3}{2}h^2 + \frac{11}{6}h^3 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)}\\ &= 1 + h - \frac{3}{2}h^2 + \frac{11}{6}h^3 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right) + \frac{1}{2}\left(h - \frac{3}{2}h^2 + \frac{11}{6}h^3\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(h - \frac{3}{2}h^2 + \frac{11}{6}h^3\right)^3\\ &= 1 + h - \frac{3}{2}h^2 + \frac{11}{6}h^3 + \frac{1}{2}\left(h^2 - 3h^3\right) + \frac{1}{3!}h^3 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)\\ &= 1 + h - h^2 + \frac{1}{2}h^3 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right),\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}(1+h)e^{\frac{\ln(1+h)}{1+h}} &= (1+h)\left(1 + h - h^2 + \frac{1}{2}h^3 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)\right)\\ &= 1 + h - h^2 + \frac{1}{2}h^3 + h + h^2 - h^3 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)\\ &= 1 + 2h - \frac{1}{2}h^3 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $f(x) = 1 + 2(x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^3 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^3\right)$.

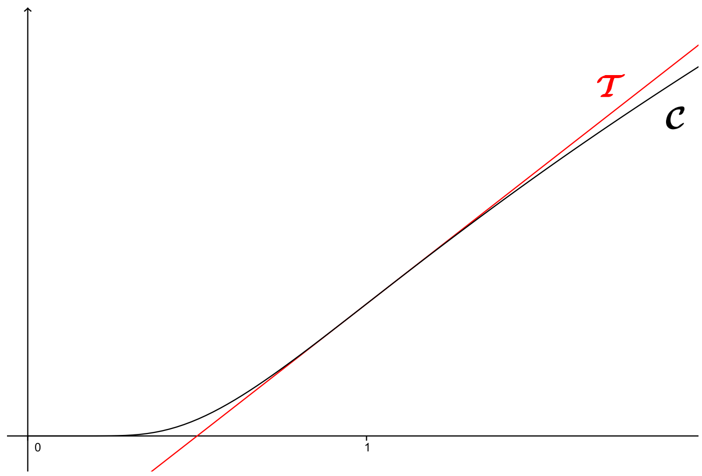
3. On déduit du développement limité de f au voisinage de 1 obtenu lors de la question précédente, que tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est la droite d'équation $y = 1 + 2(x-1)$.
Au voisinage de 1, on a

$$f(x) - [1 + 2(x-1)] = -\frac{1}{2}(x-1)^3 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^3\right) \sim -\frac{1}{2}(x-1)^3.$$

On obtient que $f(x) - [1 + 2(x-1)]$ est du même signe que $-\frac{1}{2}(x-1)^3$. Autrement dit, on a

$$\begin{cases} f(x) - [1 + 2(x-1)] \geqslant 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) - [1 + 2(x-1)] \leqslant 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

D'un point de vue graphique, ceci signifie que la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus (respectivement en dessous) de $\mathcal{T}$ pour les points d'abscisses inférieures (respectivement supérieures) à 1.



Problème 1

Partie 1 Intégrales de Wallis

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite (x_n) étant décroissante, on peut écrire $x_{n+2} \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$. En divisant chacun des membres de cette double inégalité par x_n, qui est strictement positif par hypothèse, il vient
$$\frac{x_{n+2}}{x_n} \leqslant \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 1.$$
Or, on a $x_{n+2} \sim x_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+2}}{x_n} = 1$. Par encadrement, il vient
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1, \quad \text{ie } x_{n+1} \sim x_n.$$

2. On a $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$ donc $0 \leqslant (\cos t)^{n+1} \leqslant (\cos t)^n$. Par croissance de l'intégrale, il vient
$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt,$$
autrement dit, $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. Ainsi, la suite (I_n) est une suite décroissante de réels positifs.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a déjà vu que, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $(\cos t)^n \geqslant 0$ de quoi l'on tire $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \geqslant 0$. Par ailleurs, la fonction $t \mapsto (\cos t)^n$ n'étant pas la fonction nulle, on a $I_n > 0$.

5. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \cos t dt.$$

En posant $\begin{cases} U(t) = (\cos t)^{n+1} \\ V'(t) = \cos t \end{cases}$ d'où $\begin{cases} U'(t) = -(n+1)(\cos t)^n \sin t \\ V(t) = \sin t \end{cases}$, on obtient par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[(\cos t)^{n+1}\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)(\sin t)^2(\cos t)^n dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2(\cos t)^n dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)(\cos t)^n dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n - (\cos t)^{n+2} dt = (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2} dt\right) \\ &= (n+1)\left(I_n - I_{n+2}\right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, autrement dit $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.

b) En utilisant le résultat de la question précédente, on a $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $I_n \sim I_{n+2}$. La suite (I_n) se retrouve être une suite décroissante (question 3) de réels strictement positifs (question 4) telle que $I_n \sim I_{n+2}$.
On déduit alors de la question 1 que $I_n \sim I_{n+1}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le résultat de la question 5a, on peut écrire

$$(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}\frac{n+1}{n+2}I_n = (n+1)I_nI_{n+1}.$$

Par conséquent, la suite $((n+1)I_nI_{n+1})$ est constante. En particulier, on peut écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)I_nI_{n+1} = (0+1)I_0I_1 = \frac{\pi}{2} \text{ d'après les résultats de la question } 2a.$$

7. En utilisant la résultat de la question précédente, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut réécrire

$$nI_n^2 = \frac{n}{n+1}\frac{I_n}{I_{n+1}}(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\frac{I_n}{I_{n+1}}\frac{\pi}{2}.$$

Or, on a $I_n \sim I_{n+1}$ d'après la question 5b donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$. Il s'ensuit $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$ de quoi l'on tire

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2nI_n^2}{\pi}} = 1.$$

Par conséquent, on a $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

8. Méthode 1 : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- On a $I_0 = \frac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\binom{2\times 0}{0}}{4^0}$.
- On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $I_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$. En utilisant le résultat de la question 5a, on peut écrire

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)} = I_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2}I_{2n} = \frac{2n+1}{2(n+1)}\frac{\pi}{2}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{4^n\times 2(n+1)}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{(2n+2)(2n+1)}{4^n(2n+2)\times 2(n+1)}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\pi}{2\times 4^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} = \frac{\pi}{2}\frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{4^{n+1}} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Méthode 2 : Par itérations successives de la relation établie dans la question 5a, on peut écrire :

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \cdots = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} I_0 \\ &= \frac{(2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times (2n-3) \times \cdots\cdots 3 \times 2 \times 1}{[2n \times 2(n-1) \times \cdots \times (2 \times 2) \times (2 \times 1)]^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}. \end{aligned}$$

On peut obtenir une expression de I_{2n+1} en suivant cette même méthode ou utiliser le résultat de la question 6 et écrire :

$$(2n+1) I_{2n} I_{2n+1} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I_{2n+1} = \frac{\frac{\pi}{2}}{(2n+1) I_{2n}} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Partie 2 Formule de Stirling

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

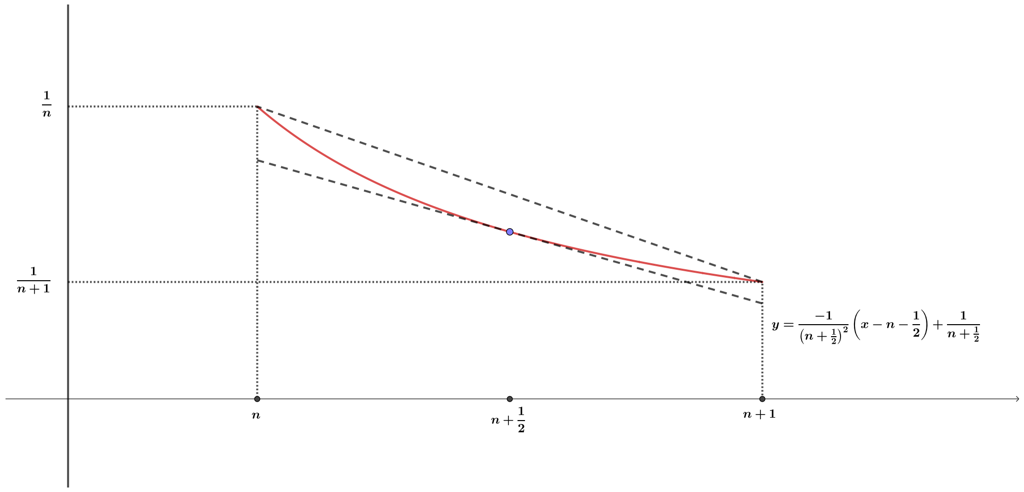
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{n^n\sqrt{n}} \frac{n! e^n}{(n+1)! e^{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^n\sqrt{n+1}}{n^n\sqrt{n}} \frac{1}{e}\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{e}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \\ &= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

2. a) On note $g : \begin{cases}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t} \end{cases}$ qui est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et qui vérifie

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad g''(t) = \frac{2}{t^3} \geqslant 0.$$

La fonction g est convexe sur $]0,+\infty[$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On considère la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ définie sur le segment $[n, n+1]$. Puisque celle-ci est convexe, on sait que sa courbe représentative est sous la corde qui relie les points d'abscisses n et $n+1$ mais au dessus de sa tangente en le point d'abscisse $n+\frac{1}{2}$ (voir illustration ci-après).



On en déduit :

$$\text{aire sous la tangente} \leqslant \text{aire sous la courbe} \leqslant \text{aire sous la corde.}$$

- L'aire sous la courbe est donnée par $\int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
- L'aire[1] sous la corde est donnée par $\frac{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\times 1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$.
- La tangente en le point d'abscisse $n+\frac{1}{2}$ admet pour équation cartésienne $y = \frac{-1}{(n+\frac{1}{2})^2}\left(x-n-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ donc l'aire sous la tangente est donnée par :

$$\frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{-1}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}}_{\text{petite base}} + \underbrace{\frac{1}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}}_{\text{grande base}}\right] = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$

Par ces considérations d'aires (ou par croissance de l'intégrale), on obtient bien

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

3. En reprenant l'expression obtenue précédemment de $a_{n+1} - a_n$ et en utilisant l'encadrement de $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, on peut écrire :

$$\underbrace{-1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n+\frac{1}{2}}}_{=0} \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant -1 + \frac{n+\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) = -1 + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{n(n+1)} = \frac{1}{4n(n+1)}$$

Sachant $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, on a la double inégalité attendue.

4. Soit $n \geqslant 2$ (l'inégalité demandée étant immédiate pour $n = 1$). En utilisant la majoration de la question 3, on peut écrire

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad a_{k+1} - a_k \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

[1]On rappelle si besoin que l'aire d'un trapèze est donnée par la relation $\frac{(\text{petite base}+\text{grande base})h}{2}$.

En sommant ces inégalités, on fait apparaitre des sommes télescopiques et on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) \leqslant \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
\Leftrightarrow &\underbrace{a_n-a_{n-1}}_{k=n}+\underbrace{a_{n-1}-a_{n-2}}_{k=n-1}+\cdots+\underbrace{a_2-a_1}_{k=1} \leqslant \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\
\Leftrightarrow &a_n \leqslant a_1+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

5. On déduit de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n \leqslant a_1+\frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se retrouve être majorée. Par ailleurs, la minoration de la question 3 prouve que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. En tant que suite croissante et majorée, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note
$$\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$
On peut écrire $\ln\left(\frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}\right) = a_n = \ell + o(1)$ ce qui donne $\frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n} = e^{\ell+o(1)}$ puis
$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{-\ell+o(1)}$$
En posant $\lambda = e^\ell > 0$ et sachant $e^{o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, ie $e^{o(1)} \sim 1$, on obtient $n! \sim \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

6. a) Les équivalents étant stables par produit/quotient/puissance, on a
$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)}{(n!)^2} \sim \frac{\lambda\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \frac{4^n\sqrt{2}}{\lambda\sqrt{n}}.$$

   b) En utilisant la formule explicite de I_{2n} établie dans la partie 1, on peut écrire
$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \sim \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{\lambda\sqrt{n}} = \frac{\pi}{\lambda\sqrt{2n}}.$$
   Par ailleurs, en utilisant l'équivalent obtenu dans la question 7 de la partie 1, on a également
$$I_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\times 2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.$$
   Il vient $\frac{\pi}{\lambda\sqrt{2n}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{2\pi}$. On en déduit $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Problème 2

Partie 1 Étude de l'endomorphisme Δ

On remarque d'ores-et-déjà que $\deg P_0 = 0$ et, P_n étant défini comme le produit de n polynômes de degrés 1, on a aussi $\deg P_n = n$.

1. a) Pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\deg P_k = k$ donc $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$. En tant que famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés, la famille $(P_0,...,P_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ avec $\mathrm{card}(P_0,...,P_n) = n+1 = \dim\mathbb{R}_n[X]$: c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $(k,m) \in \mathbb{N}^2$.

- Si $m \in [\![0, k-1]\!]$, m est une racine de P_k donc $P_k(m) = 0 \in \mathbb{Z}$.
- Si $m \geqslant k$, on a

$$\begin{aligned} P_k(m) &= \frac{m(m-1)\cdots(m-(k-1))}{k!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-(k-1))(m-k)\cdots 2\times 1}{k!(m-k)\cdots 2\times 1} \\ &= \frac{m!}{k!(m-k)!} = \binom{m}{k} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- Pour $m \geqslant 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} P_k(-m) &= \frac{-m(-m-1)\cdots(-m-(k-1))}{k!} = (-1)^k \frac{m(m+1)\cdots(m+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{1\times 2\times\cdots(m-1)m(m+1)\cdots(m+k-1)}{k!\times 1\times 2\times\cdots(m-1)} = (-1)^k \frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!} \\ &= (-1)^k \binom{m+k-1}{k} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On résume ceci en, pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, on a $P_k(m) \in \mathbb{Z}$.

c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ que l'on décompose dans la base $(P_0, ..., P_n)$ sous la forme

$$P = a_0P_0 + \cdots + a_nP_n \quad \text{avec} \quad (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

$\diamond$ On suppose que les coordonnées de P dans la base $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ sont des nombres entiers, ie $a_0 \in \mathbb{Z}$,...,$a_n \in \mathbb{Z}$. En utilisant le résultat de la question précédente, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$P(m) = \underbrace{a_0}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{P_0(m)}_{\in\mathbb{Z}} + \cdots + \underbrace{a_n}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{P_n(m)}_{\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}.$$

$\diamond$ On suppose que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a $P(m) \in \mathbb{Z}$. On a vu dans la question précédente $P_k(m) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leqslant m < k \\ 1 \text{ si } m = k \end{cases}$. En spécifiant en 0, 1,..., n la relation $P = a_0P_0 + \cdots + a_nP_n$, il vient

$$P(0) = a_0,\ P(1) = a_0 + a_1, P(2) = a_0 + a_1P_1(2) + a_2, \cdots$$

On montre alors par récurrence forte que $a_0 \in \mathbb{Z}, ..., a_n \in \mathbb{Z}$.

- On a $a_0 = P(0) \in \mathbb{Z}$ par hypothèse sur P.
- On suppose que, pour un certain $m \in [\![1, n]\!]$ fixé, on ait $a_0 \in \mathbb{Z}$,..., $a_{m-1} \in \mathbb{Z}$. On peut alors écrire

$$P(m) = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k(m) = \sum_{k=0}^{m-1} a_kP_k(m) + a_m \Leftrightarrow a_m = \underbrace{P(m)}_{\in\mathbb{Z}} - \sum_{k=0}^{m-1} \underbrace{a_k}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{P_k(m)}_{\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent, les coordonnées a_0,..., a_n de P dans la base $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ sont des nombres entiers.

2. a) $\diamond$ Si $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $P(X+1) \in \mathbb{R}[X]$ puis $\Delta(P) = P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}[X]$.
$\diamond$ Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P(X+1) + \mu Q(X+1)) - (\lambda P(X) + \mu Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) = \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q). \end{aligned}$$

Par conséquent, Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) On a $\Delta(P_0) = P_0(X+1) - P_0(X) = 1 - 1 = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+1}(X) = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(X-k)$ et

$$P_{n+1}(X+1) = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(X-(k-1)) = \frac{(X+1)}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}(X-(k-1)) \underset{j=k-1}{=} \frac{(X+1)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n-1}(X-j)$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}\Delta(P_{n+1}) = P_{n+1}(X+1) - P_{n+1}(X) &= \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)\left[(X+1)-(X-n)\right] \\ &= \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k) = P_n.\end{aligned}$$

c) On écrit $P = aX^d + Q$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $\deg Q \leqslant d-1$ de telle sorte que

$$\Delta(P) = a(X+1)^d - aX^d + Q(X+1) - Q(X).$$

$\diamond$ On remarque pour commencer que $\deg \Delta(P) < \deg P$. En effet, on a

$$\deg(Q(X+1) - Q(X)) \leqslant \max\{\deg Q(X+1), \deg Q\} = \deg Q < \deg P = d$$

et les termes en X^d dans $a(X+1)^d - aX^d$ se simplifient. Ainsi $\deg \Delta(P) < d = \deg P$.
$\diamond$ On écrit $\Delta(P) = a(X+1)^d - aX^d + \Delta(Q)$. D'après le point précédent, on a $\deg(\Delta(Q)) < d-1$ et $a(X+1)^d - aX^d = a\sum_{k=0}^{d-1}\binom{d}{k}X^k = adX^{d-1} + \cdots$. Il vient $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ et le coefficient dominant de $\Delta(P)$ est da.
$\diamond$ En itérant, il vient $\deg \Delta^d(P) = \deg(P) - d = 0$, ie $\Delta^d(P)$ est un polynôme constant, puis $\Delta^{d+1}(P) = 0$.

d) On montre $\ker \Delta = \mathbb{R}_0[X] = \{\text{polynômes constants}\}$.
$\diamond$ Si P est constant alors $\Delta(P) = 0$. Si P n'est pas constant alors $\deg P \geqslant 1$ et alors $\deg \Delta(P) = \deg(P) - 1 \geqslant 0$ donc $\Delta(P) \neq 0$. Par conséquent, on a

$$P \in \ker \Delta \Leftrightarrow P \text{ est constant.}$$

Remarque : $P \in \ker \Delta \Leftrightarrow P(X+1) = P(X)$. On a déjà résolu de plusieurs manières l'équation $P(X+1) = P(X)$.
$\diamond$ Puisque $\ker \Delta \neq \{0\}$, Δ n'est pas injectif.
$\diamond$ On montre que Δ est surjectif. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $P = 0$, on a $P = \Delta(0)$. Sinon, on note $n = \deg P$ de telle sorte que $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On décompose alors P dans la base $(P_0, ..., P_n)$ sous la forme $P = a_0P_0 + \cdots + a_nP_n$ avec $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a vu $P_k = \Delta(P_{k+1})$ donc

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k = \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta(P_{k+1}) = \Delta\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k P_{k+1}}_{\in \mathbb{R}[X]}\right).$$

Par conséquent, Δ est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}[X]$.

3. Soit $j \in \mathbb{N}$. On a vu $\Delta(P_j) = \begin{cases} P_{j-1} \text{ si } j \geqslant 1 \\ 0 \text{ si } j = 0 \end{cases}$. Par itérations successives, on a :

$$\Delta^k(P_j) = \begin{cases} P_{j-k} \text{ si } k \leqslant j \\ 0 \text{ si } k > j \end{cases}$$

Pour $j > k$, ie $j - k > 0$, 0 est une racine de P_{j-k} et $\Delta^k(P_j)(0) = P_{j-k}(0) = 0$.
Si $j = k$, on a $\Delta^k(P_j)(0) = P_0(0) = 1$. Par conséquent, on obtient

$$\Delta^k(P_j)(0) = \begin{cases} P_{j-k}(0) \text{ si } k \leqslant j \\ 0 \text{ si } k > j \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ si } j > k \\ 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ si } k > j \end{cases} = \delta_{j,k}.$$

4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ que l'on décompose dans la base $(P_0, ..., P_n)$ sous la forme

$$P = a_0P_0 + \cdots + a_nP_n = \sum_{j=0}^{n} a_jP_j \quad \text{avec} \quad (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a $\Delta^k(P) = \Delta^k\left(\sum_{j=0}^{n} a_jP_j\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j\Delta^k(P_j)$ donc

$$\Delta^k(P)(0) = \sum_{j=0}^{n} a_j\Delta^k(P_j) = \sum_{j=0}^{n} a_j\delta_{j,k} = a_k.$$

En revenant à la décomposition de P dans la base $(P_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$, il vient $P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0)P_k$.

Partie 2 Approximation de dérivées $n^{\text{ièmes}}$ par différences finies

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $T : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(X+1) \end{cases}$ de telle sorte que $\Delta = T - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$. On a $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ et $T \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]} = T = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]} \circ T$. Grâce à la formule du binôme de Newton dans l'anneau $(\mathcal{L}(\mathbb{R}[X]), +, \circ)$, on a :

$$\Delta^n = (T - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]})^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} T^j(-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]})^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j}T^j\mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j}T^j$$

Par ailleurs, pour tout $j \in \mathbb{N}$ (même $j = 0$), on a $T^j : P \mapsto P(X + j)$. Par conséquent, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\Delta^n(P) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j}T^j(P) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j}P(X + j)$$

2. a) • Dans la décomposition $X^n = a_0P_0 + \cdots + a_{n-1}P_{n-1} + a_nP_n$, sachant $\deg P_k = k$, on a $\deg(a_0P_0 + \cdots + a_{n-1}P_{n-1}) \leqslant n - 1$. Par conséquent, le terme en X^n provient de a_nP_n. Le coefficient dominant de P_n est $\frac{1}{n!}$ donc, en identifiant les coefficients dominants, il vient $1 = \frac{a_n}{n!}$, ie $a_n = n!$.

• Grâce au résultat de la question 4 de la partie,1, on sait que le coefficient a_n de P_n dans la décomposition du polynôme X^n dans la base $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est donné par $a_n = \Delta^n(X^n)(0)$.

La question précédente donne quant à elle $\Delta^n(X^n) = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(-1)^{n-j}(X+j)^n$. Le coefficient recherché est donc

$$a_n = \Delta^n(X^n)(0) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(-1)^{n-j} j^n.$$

• En identifiant les deux expressions obtenues de a_n, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(-1)^{n-j} j^n = n!$$

b) On reprend les notations de la questions précédentes. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
• On a $X^k \in \mathrm{Vect}(P_0, ..., P_k)$ donc la décomposition obtenue de X^k dans la base $(P_0, ..., P_k, ..., P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est de la forme

$$X^k = a_0 P_0 + \cdots + a_k P_k + 0 \cdot P_{k+1} + \cdots + 0 \cdot P_n.$$

Le coefficient de P_n dans cette décomposition est donc égal à 0.
• Ce même coefficient est donné également par

$$\Delta^n(X^k)(0) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(-1)^{n-j} j^k.$$

• En identifiant ces deux expressions du coefficient devant P_n dans X^k, il vient :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(-1)^{n-j} j^k = 0.$$

3. a) Soit $j \in [\![0, n]\!]$. On a $n \leqslant m$ donc f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. La formule de Taylor-Young appliquée à f au voisinage de a donne

$$f(a+jh) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(jh)^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n).$$

b) En utilisant le résultat de la question précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned} h^n A_n(h) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(-1)^{n-j} f(a+jh) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(-1)^{n-j} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(jh)^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(-1)^{n-j} j^k\right] h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n) \end{aligned}$$

La fonction $h \mapsto h^n A_n(h)$ admet un développement limité à l'ordre n quand h tend vers 0. En utilisant les résultats des questions 2a et 2b, le coefficient devant h^k est donné par :

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(-1)^{n-j} j^k\right] = \begin{cases} 0 \text{ si } j < n \\ \frac{f^{(n)}(a)}{n!} n! \text{ si } k = n \end{cases}$$

On obtient ainsi

$$h^n A_n(h) = h^n f^{(n)}(a) + \underset{h \to 0}{o}(h^n) \Leftrightarrow A_n(h) = f^{(n)}(a) + \underset{h \to 0}{o}(1).$$

Autrement dit, on a $\lim\limits_{h \to 0} A_n(h) = f^{(n)}(a)$.