MATHÉMATIQUES

Devoir n°7

Vendredi 24 Mars 2023

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants dans l'appréciation des copies. **En particulier, il est indispensable de conclure vos réponses et d'encadrer vos résultats à la règle.**

On pourra admettre le résultat d'une question après l'avoir mentionné explicitement sur sa copie.

Questions de cours :

- Énoncer l'inégalité de Jensen pour une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$.
- Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, $x \mapsto \arctan(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$.
- Énoncer la formule de Grassmann.
- Énoncer la caractérisation des sev supplémentaires dans un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie.

Exercice 1 On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $h \mapsto \frac{\ln(1+h)}{1+h}$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de $x \mapsto x^{1+\frac{1}{x}}$.
3. Donner une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse 1 et préciser la position relative de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$ au voisinage de ce point.

Problème 1

Partie 1 Intégrales de Wallis

1. Soit (x_n) une suite *décroissante* de réels *strictement positifs* telle que $x_{n+2} \sim x_n$. Montrer que $x_{n+1} \sim x_n$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt.$$

2. Calculer I_0 et I_1.
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

4. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n > 0$.

5. a) En écrivant $(\cos t)^{n+2} = (\cos t)^{n+1} \cos t$ et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
   b) En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.

6. Montrer que la suite $((n+1)I_n I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et préciser sa valeur.

7. En déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

8. Montrer que $I_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ et donner une formule similaire pour I_{2n+1}.

Partie 2 Formule de Stirling

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$a_n = \ln\left(\frac{n^n \sqrt{n}}{n! e^n}\right).$$

1. Exprimer $a_{n+1} - a_n$ en faisant apparaitre $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ pour un entier naturel n non nul.

2. a) Justifier que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est convexe sur $]0, +\infty[$.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. En considérant la tangente en le point d'abscisse $n + \frac{1}{2}$ à la courbe représentative de $t \mapsto \frac{1}{t}$ définie sur $[n, n+1]$, justifier la double inégalité
$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

3. En déduire $0 \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n \leqslant a_1 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

5. Montrer qu'il existe une constante λ strictement positive telle que $n! \sim \lambda\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

6. a) Donner un équivalent, en fonction de λ, du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$.
   b) En utilisant les résultats de la partie 1, déterminer la valeur du réel λ.

Problème 2 On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par Δ l'opérateur de différences finies, qui est défini sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Pour tout entier naturel k, on pose $\Delta^k = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$ si $k=0$ et $\Delta^k = \underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{k \text{ fois}}$ si $k \geqslant 1$.

Partie 1 Étude de l'endomorphisme Δ

On définit la famille de polynômes réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n(X) = \frac{1}{n!}X(X-1)\cdots(X-n+1) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k).$$

1. a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b) Établir, pour tout $(k,m) \in \mathbb{N}^2$, que $P_k(m)$ et $P_k(-m)$ sont des entiers.
   c) En déduire qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ (ie $\forall m \in \mathbb{Z}$, $P(m) \in \mathbb{Z}$) si et seulement si ses coordonnées dans la base $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ sont des nombres entiers.

2. a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   b) Calculer $\Delta(P_0)$, puis montrer que $\Delta(P_{n+1}) = P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c) On considère un polynôme non nul P de degré d. Préciser le degré du polynôme $\Delta(P)$ et déterminer $\Delta^{d+1}(P)$.
   d) Déterminer le noyau de Δ puis étudier si Δ est injectif/surjectif.

3. Exprimer $\Delta^k(P_j)$ et en déduire $\Delta^k(P_j)(0) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

4. En déduire, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, la relation :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) P_k$$

Partie 2 Approximation de dérivées $n^{\text{ièmes}}$ par différences finies

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\Delta^n(P) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j).$$

On pourra écrire $\Delta = \mathrm{T} - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[\mathrm{X}]}$ où T est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ à préciser.

2. a) Déterminer le coefficient de P_n dans la décomposition du polynôme X^n dans la base $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de deux manières différentes. En déduire :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^n = n!$$

   b) Démontrer que, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k = 0$.

3. Soient m et n des entiers tels que $1 \leqslant n \leqslant m$ et un réel a. De plus, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^m$ sur $\mathbb{R}$ et on pose alors :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad A_n(h) = \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} f(a+jh)$$

   a) Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Exprimer $f(a+jh)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young appliquée à l'ordre n lorsque h tend vers 0.

   b) En déduire que l'expression $h^n A_n(h)$ admet un développement limité à l'ordre n quand h tend vers 0 et préciser les coefficients devant h^n et h^k pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Quelle est la limite de $A_n(h)$ lorsque h tend vers 0 ?