MATHÉMATIQUES

Devoir n°6

Vendredi 3 Mars 2023

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants dans l'appréciation des copies. **En particulier, il est indispensable de conclure vos réponses et d'encadrer vos résultats à la règle.**

On pourra admettre le résultat d'une question après l'avoir mentionné explicitement sur sa copie.

Questions de cours :

- Énoncer le théorème de caractérisation des symétries s parmi les endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-ev E en précisant bien quels sont les espaces qui interviennent en fonction de s.
- Donner la définition et la structure de $\mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$.
- Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 1 On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Calculer T_2, T_3 et T_4.
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que, pour tout réel θ, on a $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
   b) Montrer que T_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifie cette propriété.
4. a) Prouver que T_n admet n racines distinctes données par $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   b) En déduire une expression factorisée explicite de T_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Problème 1 : Dans tout ce problème, E et F désignent deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. De plus, pour toute application linéaire f de $\mathcal{L}(E, F)$, on note

$$\begin{aligned} A_f &= \{h \in \mathcal{L}(F,E),\ f\circ h\circ f = 0\},\\ B_f &= \{h \in \mathcal{L}(F,E),\ \mathrm{Im}(f) \subset \ker(h)\}\\ \text{et } C_f &= \{h \in \mathcal{L}(F,E),\ \mathrm{Im}(h) \subset \ker(f)\}. \end{aligned}$$

Les quatre parties de ce problème sont très largement indépendantes.

Partie 1

Dans cette partie seulement, on pose $E = F = \mathbb{R}^2$ et

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-4y, -3x+6y) \end{array} \right. \quad \text{et } g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-2y, x-y) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $\ker(f) = \text{Vect}(u)$.
3. Déterminer $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(v)$.
4. Montrer que $g \in A_f$.
5. Expliciter $g \circ g$. Les applications f et g sont-elles des automorphismes de $\mathbb{R}^2$?

Partie 2

On note $T_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F,E) & \to & \mathcal{L}(E,F) \\ h & \mapsto & f \circ h \circ f \end{array} \right.$.

1. Montrer que T_f est bien définie et linéaire.
2. Montrer que A_f est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. a) Montrer que $B_f \subset A_f$.
   b) Montrer que si f est injective alors $B_f = A_f$.
4. a) Montrer que $C_f \subset A_f$.
   b) Montrer que si f est surjective alors $C_f = A_f$.
5. Montrer que si f est bijective alors T_f est bijective.

Partie 3

Dans cette partie, on considère une application linéaire g de $\mathcal{L}(F,E)$ telle que

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g.$$

1. Montrer que $f \circ g$ est un projecteur
2. Montrer que le noyau de $f \circ g$ est $\ker g$ et son image est $\text{Im } f$.
3. a) Soient $h \in \mathcal{L}(E,F)$ et G un sous-espace vectoriel de E tel que G et $\ker h$ soient supplémentaires dans E. Montrer que l'application $\tilde{h} : \begin{cases} G \to \text{Im } h \\ x \mapsto h(x) \end{cases}$ est un isomorphisme.
   b) En déduire que $\text{Im } f$ et $\text{Im } g$ sont isomorphes.

Partie 4

Dans toute cette partie, on suppose $E = F$. Un endomorphisme f de E est dit pseudo-inversible s'il existe g appartenant à $\mathcal{L}(E)$ tel que :

$$f \circ g = g \circ f, \qquad f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g.$$

On dit alors que g est un pseudo-inverse de f.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme pseudo-inversible ainsi que deux pseudo-inverses g_1 et g_2 de f.
   a) En calculant $f \circ g_1 \circ f \circ g_2$ de deux manières différentes, montrer que $f \circ g_1 = f \circ g_2$.
   b) En déduire que $g_1 = g_2$.

Un pseudo-inverse, s'il existe, est donc unique. On notera $f^\sharp$ le pseudo-inverse d'un endomorphisme f. Dans les questions 2 à 7, on étudie quelques exemples.

2. Montrer que l'endomorphisme nul est pseudo-inversible et déterminer son pseudo-inverse.
3. Montrer que si f est automorphisme de E alors f est pseudo-inversible et déterminer son pseudo-inverse. La réciproque est-elle vraie ?
4. Montrer que si f est un projecteur alors f est pseudo-inversible et déterminer son pseudo-inverse.
5. On suppose que dans cette question que f est un endomorphisme pseudo-inversible et qu'il est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier p non nul tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.
   a) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a $f^\sharp \circ f^k = f^{k-1}$.
   b) En déduire que f est l'endomorphisme nul, ie $p = 1$.
6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\varphi_A : M \mapsto AM - MA$.
   a) Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Expliciter A^2, $\varphi_A^2(M)$ et $\varphi_A^3(M)$ pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   c) L'endomorphisme φ_A est-il pseudo-inversible ?
7. On suppose que l'endomorphisme f vérifie $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = E$. Montrer que f est pseudo-inversible.
8. a) Déduire des questions précédentes qu'un endomorphisme f est pseudo-inversible si et seulement si $\ker f \oplus \mathrm{Im}\ f = E$.
   b) Les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^2$ vus dans la partie 1 sont-ils pseudo-inversibles ?

Problème 2 : Dans tout ce problème, n est un entier naturel non nul, a, b, x_0,..., x_n sont des réels tels que $a \leqslant x_0 < \cdots < x_n \leqslant b$ et f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles.
On note également P_n l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ pour lequel, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $P(x_k) = f(x_k)$.
Enfin, on note

$$\|f - P_n\|_\infty = \sup\{|f(x) - P_n(x)|,\ x \in [a, b]\}$$

qui quantifie l'erreur commise lors de l'approximation de f par P_n sur $[a, b]$.

Partie 1 Erreur de l'interpolation de Lagrange

Dans cette partie, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$.

1. Soit $x \in [a, b]$ distinct de $x_0, ..., x_n$. Justifier que l'on peut choisir un réel A de telle sorte que $\varphi : t \mapsto f(t) - P_n(t) - A(t - x_0)\cdots(t - x_n)$ s'annule en x. En déduire qu'il existe $c_x \in [a, b]$ tel que $f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$.

2. Justifier l'existence des réels $m_{n+1} = \max\{|x - x_0| \cdots |x - x_n|,\ x \in [a, b]\}$ et $\|f^{(n+1)}\|_\infty = \max\{|f^{(n+1)}(t)|,\ t \in [a, b]\}$ puis montrer :

$$\|f - P_n\|_\infty \leqslant \frac{m_{n+1}}{(n + 1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Cette inégalité donne une majoration de l'erreur commise par la méthode de l'interpolation de Lagrange à l'aide de deux termes : le premier facteur $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ qui ne dépend que de f et pas des points $x_0, ..., x_n$, un second facteur m_{n+1} qui dépend des points $x_0, ..., x_n$ mais pas de la fonction f. Dans la partie suivante, on se propose de minimiser la facteur m_{n+1} en choisissant convenablement les points d'interpolation $x_0, ..., x_n$.

Partie 2 Choix des points d'interpolation

Dans cette partie, on pose $a = -1$, $b = 1$ et $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+2}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. On rappelle que le polynôme T_{n+1}, défini dans l'exercice 1, est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout réel θ, on a $T_{n+1}(\cos\theta) = \cos((n + 1)\theta)$. Par ailleurs, on a $T_{n+1} = 2^n(X - x_0)\cdots(X - x_n)$.

1. Déterminer le maximum de $|T_{n+1}|$ sur $[-1, 1]$ puis les points en lesquels ce maximum est atteint. Que vaut T_{n+1} en ces points ?

2. On suppose que $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme unitaire de degré $n + 1$ tel que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad |P(x)| < \frac{1}{2^n}.$$

   Montrer que $\frac{T_{n+1}}{2^n} - P = 0$ et obtenir une contradiction.

3. En déduire que les meilleurs points d'interpolation $x_0, ..., x_n$ que l'on puisse choisir dans la méthode de Lagrange sont les racines de T_{n+1}.