MATHÉMATIQUES

Devoir n°6

Correction

Exercice 1 1. On calcule $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

2. On montre par récurrence double que T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
   - On a $T_1 = X = 2^0 X^1$ donc T_1 est de degré 1, de coefficient dominant 2^{1-1}.
   - On a $T_2 = 2X^2 - 1$ donc T_2 est de degré 2, de coefficient dominant 2^{2-1}.
   - On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, T_n et T_{n+1} vérifient $\deg(T_n) = n$, $\deg(T_{n+1}) = n + 1$ et ont pour coefficients dominants respectifs 2^{n-1} et 2^n. On a alors $\deg(XT_{n+1}) = n + 2 > n = \deg(T_n)$ donc
   $$\deg(T_{n+2}) = \max\{\deg(XT_{n+1}), \deg(T_n)\} = n + 2$$
   et le coefficient dominant de $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ est donné par
   $$2 \times \text{“coefficient dominant de } T_{n+1}\text{”} = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$
   ce qui achève la récurrence.

3. a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$, que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
   - Pour $n = 0$, on a $T_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0 \times \theta)$.
   - Pour $n = 1$, on a $T_1(\cos\theta) = \cos\theta = \cos(1 \times \theta)$.
   - On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ et $T_{n+1}(\cos\theta) = \cos((n + 1)\theta)$. Dès lors,
   $$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos\theta) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n + 1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos(\theta + (n + 1)\theta) + \cos(\theta - (n + 1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n + 2)\theta) \end{aligned}$$
   ce qui achève la récurrence.

   b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on ait $\cos(n\theta) = Q(\cos\theta)$. Pour tout réel $t \in [-1, 1]$, on peut écrire $t = \cos\theta$ pour un certain réel θ. Il s'ensuit $T_n(t) = T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) = Q(\cos\theta) = Q(t)$, ie
   $$\forall t \in [-1, 1], \quad (T_n - Q)(t) = 0.$$
   Le polynôme $T_n - Q$ admettant une infinité de racines, il est nul. On en déduit $Q = T_n$, ce qui prouve l'unicité demandée.

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout réel θ tel que $\cos(n\theta) = 0$ fournit une racine $\cos\theta$ de T_n puisque $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. Or, on a
   $$\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \frac{(2k + 1)\pi}{2n}.$$
   Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le réel $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ est un racine de T_n.
   Par ailleurs, pour $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, on a $0 < \frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leqslant \frac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi$ donc les réels $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k \in [\![0, n - 1]\!]$ sont deux à deux distincts et fournissent n racines distinctes de T_n. Puisque T_n est de degré n, on a trouvé toutes ses racines.

b) On sait que $\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ divise T_n et que ces deux polynômes ont le même degré donc ils sont associés. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T_n = \lambda\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$. Par ailleurs, sachant que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}, on peut conclure que :

$$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$$

Problème 1

Partie 1

1. Soient $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $v=(x',y')\in\mathbb{R}^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On a $\alpha u+\beta v=(\alpha x+\beta x, \alpha y+\beta y')$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
&f(\alpha u+\beta v)\\
=&f(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y')=(2(\alpha x+\beta x')-4(\alpha y+\beta y'),-3(\alpha x+\beta x')+6(\alpha y+\beta y'))\\
=&(\alpha(2x-4y)+\beta(2x'-4y'),\alpha(-3x+6y)+\beta(-3x'+6y'))\\
=&\alpha(2x-4y,-3x+6y)+\beta(2x'-4y',-3x'+6y')\\
=&\alpha f(x,y)+\beta f(x',y')=\alpha f(u)+\beta f(v)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&g(\alpha u+\beta v)\\
=&g(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y')=(2(\alpha x+\beta x')-2(\alpha y+\beta y'),(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y'))\\
=&(\alpha(2x-2y)+\beta(2x'-2y'),\alpha(x-y)+\beta(x'-y'))\\
=&\alpha(2x-2y,x-y)+\beta(2x'-2y',x'-y')\\
=&\alpha g(x,y)+\beta g(x',y')=\alpha g(u)+\beta g(v).
\end{aligned}$$

Les fonctions f et g sont donc linéaires.

2. Soit $w=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$w\in\ker(f)\Leftrightarrow f(w)=0\Leftrightarrow(2x-4y,-3x+6y)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4y=0\\-3x+6y=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2y$$
$$\Leftrightarrow w=(2y,y)=y(2,1)\Leftrightarrow w\in\mathrm{Vect}((2,1)).$$

En posant $u=(2,1)\in\mathbb{R}^2$, on obtient $\ker(f)=\mathrm{Vect}(u)$.

3. On remarque d'ores et déjà que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$f(x,y)=(2(x-2y),-3(x-2y))=(x-2y)\cdot(2,-3)$$

donc, en posant $v=(2,-3)$, on a $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Vect}(v)$.
Soit $w\in\mathrm{Vect}(v)$. Il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $w=(2\lambda,-3\lambda)$. On peut écrire

$$w=(2\lambda,-3\lambda)=f(\lambda,0)\quad\text{donc}\quad w\in\mathrm{Im}(f).$$

Ainsi $\mathrm{Vect}(v)\subset\mathrm{Im}(f)$ et par double inclusion, on obtient $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(v)$.

4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} f \circ g \circ f(x, y) &= f \circ g(f(x, y)) = f \circ g(2x - 4y, -3x + 6y) = f(g(2x - 4y, -3x + 6y)) \\ &= f(2(2x - 4y) - 2(-3x + 6y), (2x - 4y) - (-3x + 6y)) = f(10x - 20y, 5x - 10y) \\ &= (2(10x - 20y) - 4(5x - 10y), -3(10x - 20y) + 6(5x - 10y)) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

donc $f \circ g \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$, ie g appartient à A_f.

5. $\diamond$ Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} g \circ g(x, y) &= g(2x - 2y, x - y) = (2(2x - 2y) - 2(x - y), 2x - 2y - (x - y)) \\ &= (2x - 2y, x - y) = g(x, y). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $g \circ g = g$.
$\diamond$ On a vu dans la question 2 que $\ker f \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective. Par conséquent, f n'est pas bijective. (La question 3 prouve que f n'est pas surjective).
$\diamond$ Le vecteur $(1, 1) \in \ker g$ donc $\ker g \neq \{0\}$ et g se retrouve ne pas être injective donc non bijective. On peut également dire que si g est bijective, la fonction réciproque g^{-1} existe et la relation $g \circ g = g$ donne alors $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ ce qui est absurde.
Par conséquent, les applications f et g ne sont pas des automorphismes de $\mathbb{R}^2$.

Partie 2

1. Soient $(h_1, h_2) \in \mathcal{L}(F, E)^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. La fonction f étant linéaire, on a

$$\begin{aligned} T_f(\lambda_1 \cdot h_1 + \lambda_2 \cdot h_2) &= f \circ (\lambda_1 \cdot h_1 + \lambda_2 \cdot h_2) \circ f = f \circ (\lambda_1 \cdot h_1 \circ f + \lambda_2 \cdot h_2 \circ f) \\ &= \lambda_1 \cdot f \circ h_1 \circ f + \lambda_2 \cdot f \circ h_2 \circ f \\ &= \lambda_1 \cdot T_f(h_1) + \lambda_2 \cdot T_f(h_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'application T_f est une application linéaire.

2. On a $A_f = \ker(T_f)$ donc A_f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F, E)$ en tant que noyau d'une application linéaire.

3. a) Soit $h \in B_f$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(h)$. Pour tout $x \in E$, on a $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \ker(h)$ donc

$$h \circ f(x) = h(f(x)) = 0 \text{ puis } f \circ h \circ f(x) = f(h \circ f(x)) = f(0) = 0.$$

Par conséquent, l'application $f \circ h \circ f$ est la fonction nulle, ie $f \circ h \circ f = 0$. Il s'ensuit $h \in A_f$ de quoi l'on déduit $B_f \subset A_f$.

b) On a déjà montré lors de la question précédente $B_f \subset A_f$. On montre maintenant l'inclusion $A_f \subset B_f$ sous l'hypothèse f injective, ie $\ker(f) = \{0\}$.
Soit $h \in A_f$. Montrons que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(h)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Dès lors,

$$f(h(y)) = f(h(f(x))) = f \circ h \circ f(x) = 0 \quad \text{car } h \in A_f.$$

On obtient $h(y) \in \ker(f)$. La fonction f étant injective, on a $\ker(f) = \{0\}$ donc $h(y) = 0$, ie $y \in \ker(h)$. Il s'ensuit $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(h)$, autrement dit $h \in B_f$.
Par double inclusion, si f est injective, on a $A_f = B_f$.

4. a) Soit $h \in C_f$, ie $\mathrm{Im}(h) \subset \ker(f)$. Pour tout $y \in F$, on a $h(y) \in \mathrm{Im}(h) \subset \ker(f)$, donc $f \circ h(y) = f(h(y)) = 0$. Dès lors, pour tout $x \in E$, on a
$$f \circ h \circ f(x) = f \circ h(\underbrace{f(x)}_{\in F}) = 0.$$
Par conséquent, l'application $f \circ h \circ f$ est la fonction nulle, ie $f \circ h \circ f = 0$. Il s'ensuit $h \in A_f$ de quoi l'on déduit $C_f \subset A_f$.

   b) On a déjà montré lors de la question précédente $C_f \subset A_f$. On montre maintenant l'inclusion $A_f \subset C_f$ sous l'hypothèse f surjective.
Soit $h \in A_f$. Montrons que $\mathrm{Im}(h) \subset \ker(f)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(h)$. Il existe $y \in F$ tel que $x = h(y)$. On a $y \in F$ et f surjective donc il existe $x' \in E$ tel que $y = f(x')$. Dès lors,
$$f(x) = f(h(y)) = f(h(f(x'))) = f \circ h \circ f(x') = 0 \text{ car } h \in A_f.$$
On obtient ainsi $x \in \ker(f)$. Il s'ensuit $\mathrm{Im}(h) \subset \ker(f)$, autrement dit $h \in C_f$.
Par double inclusion, si f est surjective, on a $A_f = B_f$.

5. Si f est bijective alors il existe $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$. On définit alors
$$T_{f-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{L}(F,E) \\ h & \mapsto & f^{-1} \circ h \circ f^{-1} \end{array} \right. .$$
Dès lors, on a $T_f \circ T_{f^{-1}} : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(E,F)$ et pour tout $h \in \mathcal{L}(E,F)$, on a
$$\begin{aligned} T_f \circ T_{f^{-1}}(h) &= T_f(f^{-1} \circ h \circ f^{-1}) = f \circ (f^{-1} \circ h \circ f^{-1}) \circ f = (f \circ f^{-1}) \circ h \circ (f^{-1} \circ f) \\ &= \mathrm{Id}_F \circ h \circ \mathrm{Id}_E = h \end{aligned}$$
donc $T_f \circ T_{f^{-1}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E,F)}$. De même, pour tout $h \in \mathcal{L}(F,E)$, on a
$$\begin{aligned} T_{f^{-1}} \circ T_f(h) &= T_{f^{-1}}(f \circ h \circ f) = f^{-1} \circ (f \circ h \circ f) \circ f^{-1} = (f^{-1} \circ f) \circ h \circ (f \circ f^{-1}) \\ &= \mathrm{Id}_E \circ h \circ \mathrm{Id}_F = h \end{aligned}$$
donc $T_{f^{-1}} \circ T_f = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(F,E)}$. Par conséquent, T_f est une application bijective.

Partie 3

1. L'application $f \circ g : F \to F$ est linéaire en tant que composée d'applications linéaires et de plus, elle vérifie
$$(f \circ g) \circ (f \circ g) = (f \circ g \circ f) \circ g = f \circ g.$$
Par conséquent, l'endomorphisme $f \circ g$ est la projection sur $\mathrm{Im}(f \circ g)$ parallèlement à $\ker(f \circ g)$.

2. ⋄ On montre que $\ker(f \circ g) = \ker(g)$. On a toujours $\ker(g) \subset \ker(f \circ g)$. Réciproquement, soit $x \in \ker(f \circ g)$ ie $f \circ g(x) = 0_F$. Sachant que $g = g \circ f \circ g$, on a
$$g(x) = g \circ f \circ g(x) = g(f \circ g(x)) = g(0_F) = 0_E \text{ donc } x \in \ker(g).$$
On a ainsi $\ker(f \circ g) \subset \ker(g)$. Par double inclusion, on obtient $\ker(g) = \ker(f \circ g)$.
⋄ On montre que $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$. On a toujours $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$. Réciproquement, si $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Sachant que $f = f \circ g \circ f$, il vient
$$y = f(x) = f \circ g \circ f(x) = f \circ g(f(x)) \in \mathrm{Im}(f \circ g).$$
Ainsi, on a $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f \circ g)$. Par double inclusion, on obtient $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ g)$.

3. a) Par construction, l'application $\tilde{h}$ est bien à valeurs dans Im h.
$\diamond$ On montre que $\tilde{h}$ est surjective. Soit $y \in \text{Im } h$.
Il existe $x \in E$ tel que $y = h(x)$. Sachant $E = H \oplus \ker(h)$, le vecteur x se décompose sous la forme $x = x_H + a$ avec $x_H \in H$ et $a \in \ker(h)$. On peut alors écrire

$$y = h(x) = h(x_H + a) = h(x_H) + \underbrace{h(a)}_{=0} = h(\underbrace{x_h}_{\in H}) = \tilde{h}(x_h).$$

La fonction $\tilde{h}$ est surjective.
$\diamond$ On montre que $\tilde{h}$ est injective. On a déjà $\{0\} \subset \ker \tilde{h}$. Par ailleurs, on a $\ker \tilde{h} \subset G$ et $\ker \tilde{h} \subset \ker h$ donc $\ker \tilde{h} \subset G \cap \ker = \{0\}$ puisque G et $\ker h$ sont supplémentaires dans E. Par double inclusion, il vient $\ker \tilde{h} = \{0\}$ et $\tilde{h}$ se retrouve être injective.
$\diamond$ $\tilde{h}$ est une application linéaire (car h en est une) bijective : c'est un isomorphisme.

b) L'endomorphisme $f \circ g$ étant une projection, on sait en particulier que $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$ et $\ker(f \circ g) = \ker(g)$ sont supplémentaires dans F, ie $\text{Im}(f) \oplus \ker(g) = F$.
La question précédente appliquée à $g : F \to E$ et $G = \text{Im}(f)$ construit un isomorphisme entre $G = \text{Im}(f)$ et $\text{Im}(g)$ donc $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(g)$ sont isomorphes.

Remarque : On pouvait montrer directement $\text{Im}(f) \oplus \ker(g) = F$

- On montre $\text{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.
Soit $y \in \text{Im}(f) \cap \ker(g)$. On a $y \in \text{Im}(f)$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus, on a $y \in \ker(g)$ donc $g(y) = 0$. Alors

$$y = f(x) = f \circ g \circ f(x) = f \circ g(f(x)) = f \circ g(y) = f(g(y)) = f(0) = 0.$$

Ainsi, on obtient $\text{Im}(f) \cap \ker(g) \subset \{0\}$. L'inclusion $\{0\} \subset \text{Im}(f) \cap \ker(g)$ étant toujours vraie, il vient par double inclusion $\text{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.

- On montre $\text{Im}(f) + \ker(g) = F$. Soit $y \in F$.
Analyse : Supposons qu'il existe $b \in \text{Im}(f)$ et $b' \in \ker(g)$ tel que $y = b + b'$. On a $b \in \text{Im}(f)$ donc il existe $a \in E$ tel que $b = f(a)$. Dès lors,

$$b = f(a) = f \circ g \circ f(a) = f(g(y - b')) = f(g(y)) - f(g(b')) = f(g(y)) - 0 = f \circ g(x) \quad \text{car } b' \in \ker(g)$$

puis $b' = y - b = y - f \circ g(y)$.
Synthèse : On pose $b = f \circ g(y)$ et $b' = y - f \circ g(y)$. Se faisant :

  - on a $b + b' = f \circ g(y) + y - f \circ g(y) = y$,
  - on a $b = f \circ g(y) = f(g(y)) \in \text{Im}(f)$,
  - on a $g(b') = g(y - f \circ g(y)) = g(y) - g \circ f \circ g(y) = g(y) - g(y) = 0$ donc $b' \in \ker(g)$.

Par conséquent, on a $y \in \text{Im}(f) + \ker(g)$ puis $F \subset \text{Im}(f) + \ker(g)$. Par ailleurs, $\text{Im}(f)$ et $\ker(g)$ étant des sous-espaces vectoriels de F, on a également $\text{Im}(f) + \ker(g) \subset F$. Par double inclusion, il vient $\text{Im}(f) + \ker(g) = F$.

- On a ainsi $\text{Im}(f) + \ker(g) = F$ et $\text{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$ donc $\text{Im}(f) \oplus \ker(g) = F$. Autrement dit, $\text{Im}(f)$ et $\ker(g)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans F.

Partie 4

1. a) Les endomorphismes g_1 et g_2 sont deux pseudo-inverses de f donc vérifient

$$\begin{cases} f \circ g_1 = g_1 \circ f \\ f \circ g_1 \circ f = f \\ g_1 \circ f \circ g_1 = g_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f \circ g_2 = g_2 \circ f \\ f \circ g_2 \circ f = f \\ g_2 \circ f \circ g_2 = g_2 \end{cases}.$$

D'une part, on peut écrire $f \circ g_1 \circ f \circ g_2 = (f \circ g_1 \circ f) \circ g_2 = f \circ g_2$ et d'autre part

$$f \circ g_1 \circ f \circ g_2 = (f \circ g_1) \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ (g_2 \circ f) = g_1 \circ (f \circ g_2 \circ f) = g_1 \circ f = f \circ g_1.$$

On a ainsi $f \circ g_1 = f \circ g_2$.

b) On a prouvé $f \circ g_1 = f \circ g_2$ de quoi l'on tire également $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Il s'ensuit

$$g_1 = (g_1 \circ f) \circ g_1 = (g_2 \circ f) \circ g_1 = g_2 \circ (f \circ g_1) = g_2 \circ (f \circ g_2) = g_2.$$

2. On note $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul. Celui-ci vérifie

$$\begin{cases} 0_{\mathcal{L}(E)} \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ 0_{\mathcal{L}(E)} \\ 0_{\mathcal{L}(E)} \circ 0_{\mathcal{L}(E)} \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)} \end{cases}$$

donc $0_{\mathcal{L}(E)}$ est pseudo-inversible et son pseudo-inverse est lui-même, ie $0_{\mathcal{L}(E)}^\sharp = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

3. Soit f un automorphisme de E, ie f est un endomorphisme bijectif. À ce titre, la bijection réciproque f^{-1} de f existe et vérifie $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ donc

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f, \qquad f \circ f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \circ f = f \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E \circ f^{-1} = f^{-1}.$$

L'automorphisme f est pseudo-inversible et son pseudo-inverse est $f^\sharp = f^{-1}$.
La réciproque est fausse puisque l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$ est pseudo-inversible mais n'est pas un automorphisme de E.

4. Puisque f est un projecteur, il vérifie $f \circ f = f$. On a également $f \circ f \circ f = f \circ f = f$. Par conséquent, f est pseudo-inversible et $f^\sharp = f$.

5. a) Soit $k \geqslant 2$. On peut écrire

$$f^\sharp \circ f^k = (f^\sharp \circ f) \circ f^{k-1} = (f \circ f^\sharp) \circ f^{k-1} = f \circ f^\sharp \circ f \circ f^{k-2} = f \circ f^{k-2} = f^{k-1}.$$

b) On note p un entier naturel non nul (ie $p \geqslant 1$) tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Si $p \geqslant 2$, grâce à la question précédente, on obtient

$$f^{p-1} = f^\sharp \circ f^p = f^\sharp \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

ce qui est absurde. Par conséquent, on obtient $p = 1$ d'où $f = f^1 = 0_{\mathcal{L}}(E)$. Autrement dit, le seul endomorphisme nilpotent pseudo-inversible est l'endomorphisme nul.

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\varphi_A : M \mapsto AM - MA$.

a) L'application φ_A est définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Par ailleurs, pour tout $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) &= A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) - (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)A \\ &= \lambda_1(AM_1 - M_1 A) + \lambda_2(AM_2 - M_2 A) \\ &= \lambda_1 \varphi_A(M_1) + \lambda_2 \varphi_A(M_2).\end{aligned}$$

b) On calcule $A^2 = 0$. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}\varphi_A^2(M) = \varphi_A(\varphi_A(M)) &= A\varphi_A(M) - \varphi_A(M)A = A(AM - MA) - (AM - MA)A \\ &= A^2 M - 2AMA + MA^2 = -2AMA.\end{aligned}$$

et

$$\varphi_A^3(M) = \varphi_A(\varphi_A^2(M)) = -2\varphi_A(AMA) = -2(A^2 MA - AMA^2) = 0.$$

Par conséquent, $\varphi_A^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))}$ et φ_A est donc un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) On a vu dans la question 5 que le seul endomorphisme nilpotent pseudo-inversible est l'endomorphisme nul. Puisque que φ_A est un endomorphisme nilpotent non nul, φ_A n'est pas pseudo-inversible.

7. On suppose $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = E$. On a vu dans la partie 3 que $\tilde{f} : \begin{cases} \mathrm{Im}\ f \to \mathrm{Im} f \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ est un isomorphisme.

L'endomorphisme $\tilde{f}^{-1} : \mathrm{Im} f \to \mathrm{Im} f$ existe. On considère alors l'unique endomorphisme $g : E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\ f \to E$ défini par $g_{|\ker f} = 0$ et $g_{|\mathrm{Im}\ f} = \tilde{f}^{-1}$.
Par construction, pour tout $x \in E$ que l'on décompose sous la forme $x = x_k + x_i$ avec $x_k \in \ker f$ et $x_i \in \mathrm{Im}\ f$, on a :

$$g(x) = g_{|\ker f}(x_k) + g_{|\mathrm{Im}\ f}(x_i) = \tilde{f}^{-1}(x_i) = \text{“unique élément } a \in \mathrm{Im}\ f \text{ tel que } f(a) = x_i''$$

Par conséquent, pour tout $x = x_k + x_i \in E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\ f$, on a :

- D'une part $f \circ g(x) = f(\tilde{f}^{-1}(x_i)) = x_i$. D'autre part, sachant $f(x) = f(x_k + x_i) = f(x_i)$ avec $x_i \in \mathrm{Im}\ f$, on peut écrire
$$g \circ f(x) = g(\underbrace{0}_{\in \ker f} + \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}\ f}) = \tilde{f}^{-1}(f(x)) = \tilde{f}^{-1}(f(x_i)) = x_i.$$
On a bien $g \circ f = f \circ g$.
- Sachant $g(x_k) = 0$, on a aussi
$$g \circ f \circ g(x) = g(f \circ g(x)) = g(x_i) = g(x_k + x_i) = g(x)$$
donc $g \circ f \circ g = g$.
- Enfin, on a $f \circ g \circ f(x) = f(g \circ f(x)) = f(x_i) = f(x)$ donc $f \circ g \circ f = f$.

L'endomorphisme f est pseudo-inversible et $f^\sharp = g$.

8. a) $\diamond$ La question précédente prouve une implication.
$\diamond$ On suppose que f est un endomorphisme pseudo-inversible. Ainsi les hypothèses de la partie 3 sont vérifiées. Dans cette partie, on a vu $\mathrm{Im}(g) \oplus \ker(f) = E$.
Par ailleurs, on sait également $f \circ g = g \circ f$ donc on a
$$f = f \circ g \circ f = g \circ f^2 \quad \text{qui donne} \quad \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g).$$
De même, on a $g = g \circ f \circ f = f \circ g^2$ donc $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$. Par double inclusion, il vient $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ puis $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$.

b) On sait déjà que f et g ne sont pas inversibles.
$\diamond$ On a vu dans la question 5 de la partie 1 que g est un projecteur donc g est pseudo-inversible (question 4 de la partie 4).
$\diamond$ On a vu dans la partie 1 que $\ker(f) = \text{Vect}(u)$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}(v)$ avec $u = (2,1)$ et $v = (2,-3)$.

- Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires donc $\text{Vect}(u) \cap \text{Vect}(v) = \{0\}$.
- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{cases} 2a + 2b = x \\ a - 3b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3x+2y}{8} \\ b = \frac{x-2y}{8} \end{cases}.$$

On vérifie $(x,y) = \underbrace{\dfrac{3x+2y}{8}(2,1)}_{\in \text{Vect}(u)} + \underbrace{\dfrac{x-2y}{8}(2,-3)}_{\in \text{Vect}(v)}$ donc $\mathbb{R}^2 \subset \text{Vect}(u) + \text{Vect}(v)$. La deuxième inclusion est immédiate donc $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(u) + \text{Vect}(v)$

On a ainsi $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(u) \oplus \text{Vect}(v) = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$. Grâce à la caractérisation des endomorphismes pseudo-inversibles établie précédemment, on peut affirmer que f est pseudo-inversible.

Problème 2

Partie 1 Erreur de l'interpolation de Lagrange

Dans cette partie, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$.

1. Soit $x \in [a,b]$ distinct de $x_0, ..., x_n$ de telle sorte que $(x - x_0) \cdots (x - x_n) \neq 0$. On a

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow A = \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0) \cdots (x - x_n)}.$$

Avec ce choix de A, sachant que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a aussi $\varphi(x_k) = f(x_k) - P(x_k) = 0$, la fonction φ s'annule en au moins $n+2$ réels distincts de l'intervalle $[a,b]$. Il existe ainsi $n+1$ intervalles disjoints de la forme $]\alpha, \beta[$, inclus dans $[a,b]$ pour lesquels φ est continue sur $[\alpha, \beta]$, dérivable sur $]\alpha, \beta[$ et avec $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Grâce au théorème de Rolle, la fonction φ' s'annule en $n+1$ réels distincts de $[a,b]$. La fonction φ étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, on peut itérer ce processus et dire :

- φ s'annule en au moins $n+2$ réels distincts de $[a,b]$,
- φ' s'annule en au moins $n+1$ réels distincts de $[a,b]$,
- φ'' s'annule en au moins n réels distincts de $[a,b]$,
- ...
- $\varphi^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.

Autrement dit, il existe $c_x \in [a,b]$ tel que $\varphi^{(n+1)}(c_x) = 0$. Par ailleurs, on a $\deg P_n \leqslant n$ donc $P_n^{(n+1)} = 0$. De plus, le polynôme $(X - x_0) \cdots (X - x_n)$ est unitaire de degré $n+1$ donc $((t - x_0) \cdots (t - x_n))^{(n+1)} = (n+1)!$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - A(n+1)!$ puis

$$\varphi^{(n+1)}(c_x) = 0 \Leftrightarrow A = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \Leftrightarrow f(x) - P_n(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x).$$

2. La fonction $x \mapsto (x-x_0)\cdots(x-x_n)$ est continue sur $[a,b]$ en tant que fonction polynômiale. La fonction $t \mapsto f^{(n+1)}(t)$ est continue sur $[a,b]$ car f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. En tant que fonctions continues sur un segment, ces deux fonctions sont bornées et atteignent leurs bornes : les réels m_{n+1} et $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ sont bien définis.
   Pour tout réel $x \in [a,b]$ avec x distinct de x_0,...,x_n, en utilisant le résultat de la question précédente, on peut écrire
   $$|f(x)-P_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!}\underbrace{|x-x_0|\cdots|x-x_n|}_{\leqslant m_{n+1}}\underbrace{|f^{(n+1)}(c_x)|}_{\leqslant \|f^{(n+1)}\|_\infty} \leqslant \frac{m_{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty.$$
   Si $x \in [a,b]$ est l'un des x_i avec $0 \leqslant i \leqslant n$ alors, sachant que f et P coïncident en tous les x_k avec $0 \leqslant j \leqslant n$, on a $|f(x)-P_n(x)| = |f(x_i)-P_n(x_i)| = 0$. L'inégalité précédente demeure valable dans ce cas.

Partie 2 Choix des points d'interpolation

1. Soit $x \in [-1,1]$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$. On peut alors écrire
   $$|T_{n+1}(x)| = |T_{n+1}(\cos\theta)| = |\cos(n+1)\theta| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |T_{n+1}(1)| = |T_{n+1}(\cos 0)| = |\cos 0| = 1.$$
   On en déduit $\max\limits_{x\in[-1,1]} |T_{n+1}(x)| = 1$.
   De plus, on a
   $$\begin{aligned} |T_{n+1}(x)| = 1 &\Leftrightarrow T_{n+1}(x) = \pm 1 \Leftrightarrow T_{n+1}(\cos\theta) = \pm 1 \Leftrightarrow \cos((n+1)\theta) = \pm 1 \\ &\Leftrightarrow (n+1)\theta \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\quad \theta = \frac{k\pi}{n+1} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = \cos\frac{k\pi}{n+1} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,n+1]\!],\quad x = \cos\frac{k\pi}{n+1} \end{aligned}$$
   Pour tout $k \in [\![0,n+1]\!]$, on note $\alpha_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}$. On a
   $$T_{n+1}(\alpha_k) = T_{n+1}(\cos\frac{k\pi}{n+1}) = \cos k\pi = (-1)^k.$$
   On remarque d'ores-et-déjà que l'on a
   $$-1 = \alpha_{n+1} < x_n < \alpha_n < \cdots \alpha_2 < x_1 < \alpha_1 < x_0 < \alpha_0 = 1$$
   et on peut résumer les résultats précédents à l'aide du tableau suivant :

x	α_{n+1}	x_n	α_n	$\cdots$	α_2	x_1	α_1	x_0	α_0
$T_{n+1}(x)$	$-(-1)^n$	0	$(-1)^n$	$\cdots$	1	0	-1	0	1

2. Pour tout $k \in [\![0,n+1]\!]$, on a
   $$|P(\alpha_k)| < \frac{1}{2^n} = \left|\frac{T_{n+1}(\alpha_k)}{2^n}\right|$$
   donc $\frac{T_{n+1}}{2^n}(\alpha_k) - P(\alpha_k)$ est du signe de $\frac{T_{n+1}}{2^n}(\alpha_k) = \frac{(-1)^k}{2^n}$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, la fonction polynômiale $x \mapsto \frac{T_{n+1}(x)}{2^n} - P(x)$ s'annule sur $]\alpha_{n+1},\alpha_n[$, ..., sur $]\alpha_2,\alpha_1[$ et sur $]\alpha_1,\alpha_0[$. Le polynôme $\frac{T_{n+1}}{2^n} - P$ admet donc au moins $n+1$ racines réelles distinctes.
   Cependant, dans une différence de deux polynômes unitaires de même degré $n+1$, les termes en

X^{n+1} se simplifient et on a $\deg\left(\frac{T_{n+1}}{2^n} - P\right) \leqslant n$.
Le polynôme $\frac{T_{n+1}}{2^n} - P$ possède strictement plus de racines que son degré : il est nul, ie $P = \frac{T_{n+1}}{2^n}$.
On a ainsi

$$P(1) = \frac{T_{n+1}(1)}{2^n} = \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad |P(1)| < \frac{1}{2^n}$$

ce qui est absurde. On en déduit que, pour tout polynôme P unitaire de degré $n+1$, il existe $x \in [-1,1]$ tel que $|P(x)| \geqslant \frac{1}{2^n}$, ie $\max\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^n}$.

3. Soit $x_0, ..., x_n$ les racines de T_{n+1}. On rappelle que

$$m_{n+1} = \max\{|x - x_0| \cdots |x - x_n|,\ x \in [a,b]\} = \max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{T_{n+1}(x)}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n}.$$

On considère également $n+1$ autres réels $-1 = a \leqslant \tilde{x}_0 < \cdots < \tilde{x}_n \leqslant b = 1$ qui constituent de nouveaux points d'interpolation et on note $\tilde{m}_{n+1} = \max\{|x - \tilde{x}_0| \cdots |x - \tilde{x}_n|,\ x \in [a,b]\}$. Le polynôme $P = (X - \tilde{x}_0) \cdots (X - \tilde{x}_n)$ est unitaire de degré $n+1$ donc, d'après la question précédente, on sait $\max\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^n}$.
Par conséquent, on a toujours

$$\tilde{m}_{n+1} = \max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^n} = m_{n+1}.$$

Les points d'interpolation $x_0, ..., x_n$ sont ceux qui permettent de minimiser le paramètre m_{n+1} qui apparait dans l'inégalité qui donne une majoration de l'erreur commise dans la méthode de l'interpolation de Lagrange.