MATHÉMATIQUES

Devoir n°5

Correction

Exercice 1 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $((x-a)^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}$ et de même, on a $((x-b)^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(x-b)^{n-k}$. En appliquant la formule de Leibniz, il vient

$$\begin{aligned}
P_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((x-a)^n)^{(k)} ((x-b)^n)^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k} \frac{n!}{(n-(n-k))!}(x-a)^{n-(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!n!}{k!(n-k)!}(x-a)^{n-k}(x-b)^k \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-a)^{n-k}(x-b)^k.
\end{aligned}$$

2. Si $a = b$, l'expression précédente de $P_n^{(n)}(x)$ se réécrit

$$P_n^{(n)}(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-a)^{n-k}(x-a)^k = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-a)^n = n!(x-a)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

3. Si $a = b$, on a $P_n(x) = (x-a)^{2n}$ donc

$$P_n^{(n)}(x) = ((x-a)^{2n})^{(n)} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!}(x-a)^{2n-n} = \frac{(2n)!}{n!}(x-a)^n = n!\binom{2n}{n}(x-a)^n.$$

4. On dispose de deux expressions polynomiales de $P_n^{(n)}(x)$ lorsque $a = b$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$n!(x-a)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = n!\binom{2n}{n}(x-a)^n.$$

Il s'ensuit $n! \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = n!\binom{2n}{n}$ puis

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 2 1. On rappelle que $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\} \subset \mathbb{U}$.

- On a $1^n = 1$ donc $1 \in \mathbb{U}_n$.
- Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}_n^2$. On a $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n = 1 \times 1 = 1$ donc $z_1 z_2 \in \mathbb{U}_n$.
- Soit $z \in \mathbb{U}_n$. On a $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1} = 1$ donc $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$.

Par conséquent, $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.

2. On rappelle que $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

   a) On a $u \in \mathbb{U}_n$ donc $f(u) \in \mathbb{U}_n$. Grâce à la description des éléments de $\mathbb{U}_n$ rappelée ci-avant, il existe $m \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $f(u) = e^{\frac{2i\pi m}{n}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^m = u^m$.

   b) Soit $v \in \mathbb{U}_n$. Il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $v = u^k$. Comme f est un morphisme de groupes, on a
   $$f(v) = f(u^k) = f(u)^k = (u^m)^k = u^{mk} = (u^k)^m = v^m.$$

3. a) On a $g(2\pi) = f(e^{2i\pi}) = f(1) = g(0)$. Comme f est un morphisme de groupes, on a $f(1) = 1$ donc $g(0) = 1$ et $g(2\pi) = 1$.

   b) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé et soit $h \in \mathbb{R}$ qui a vocation à tendre vers 0. Puisque f est un morphisme de groupes, on peut écrire
   $$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \frac{f(e^{it}e^{ih}) - f(e^{it})}{h} = \frac{f(e^{it})f(e^{ih}) - f(e^{it})}{h} = \frac{g(h) - g(0)}{h} g(t).$$
   Comme g est supposée dérivable en 0, on a $\frac{g(h)-g(0)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} g'(0)$ donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(t+h)-g(t)}{h} = g'(0)g(t)$. Par définition, la fonction g est dérivable en tout réel t et on a $g'(t) = g'(0)g(t)$.

   c) La fonction g de la question précédente est solution de l'équation différentielle $y' - g'(0)y = 0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g(t) = \lambda e^{g'(0)t}$. Sachant $g(0) = 1 = g(2\pi)$, on obtient $\lambda = 1$ et
   $$e^{2\pi g'(0)} = 1 \Leftrightarrow 2\pi g'(0) \equiv 0[2i\pi] \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ 2\pi g'(0) = 2im\pi \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ g'(0) = im.$$
   Ainsi, pour tout réel t, on a $g(t) = e^{2imt}$. Par conséquent, pour tout complexe $v \in \mathbb{U}$, en notant $t \in \mathbb{R}$ un argument de v, ie $v = e^{it}$, on peut écrire
   $$f(v) = f(e^{it}) = g(t) = e^{imt} = (e^{it})^m = v^m.$$

4. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   a) Pour tout réel t, on a $|g(t)| = 1$ donc $g(t) \neq 0$ donc $\varphi(t)$ est bien défini. Par ailleurs, pour tout réel t, on a
   $$1 = |g(t)|^2 = g(t)\overline{g(t)}.$$
   Les fonctions g et $t \mapsto \overline{g(t)}$ sont dérivables sur I et en dérivant la relation ci-avant, il vient
   $$0 = g'(t)\overline{g(t)} + g(t)(\overline{g(t)})' = g'(t)\overline{g(t)} + g(t)\overline{g'(t)}$$
   ce qui donne $\overline{\left(\frac{g'(t)}{g(t)}\right)} = \frac{\overline{g'(t)}}{\overline{g(t)}} = -\frac{g'(t)}{g(t)}$. Autrement dit, le complexe $\frac{g'(t)}{g(t)}$ est un imaginaire pur de quoi on déduit que $\varphi(t) = -i\frac{g'(t)}{g(t)}$ est un nombre réel.

   b) La fonction $\geqslant$ est supposée de classe $\mathcal{C}^1$ donc g' est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant quotient de fonctions continues donc, grâce au théorème fondamental du calcul, la fonction $t \mapsto \int_0^t \varphi(x)dx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\left(\int_0^t \varphi(x)dx\right)' = \varphi'(t)$ qui est continue, ie $t \mapsto \int_0^t \varphi(x)dx$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel t, on a
   $$h'(t) = i\left(\int_0^t \varphi(x)dx\right)' \times g(0)e^{i\int_0^t \varphi(x)dx} = i\varphi(t)h(t) = \frac{g'(t)}{g(t)}h(t).$$

c) On déduit de la question précédente que, pour tout réel t, on a

$$\left(\frac{h(t)}{g(t)}\right)' = \frac{h'(t)g(t) - h(t)g'(t)}{g(t)^2} = 0$$

donc la fonction $\frac{h}{g}$ est constante. Sachant $\frac{h(0)}{g(0)} = \frac{g(0)}{g(0)} = 1$, pour tout réel t, on a $\frac{h(t)}{g(t)} = 1$, ie $g(t) = h(t)$.
On a $g(0) \in \mathbb{U}$ donc on peut écrire $g(0) = e^{i\theta_0}$ puis, pour tout réel t, on a

$$g(t) = h(t) = g(0)e^{i\int_0^t \varphi(x)dx} = e^{i\left(\theta_0 + \int_0^t \varphi(x)dx\right)}.$$

La fonction $\theta : t \mapsto \theta_0 + \int_0^t \varphi(x)dx$ est une fonction à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $g(t) = e^{i\theta(t)}$ pour tout réel t.

Problème :

Partie 1 Matrices stochastiques de taille 2

1. Une matrice est stochastique si elle est à coefficients positifs et que, pour chaque ligne, la somme de tous les coefficients est égale à 1.
La matrice identité est bien à coefficients positifs et, comme sur chaque ligne, il n'y a que des 0 sauf un coefficient qui est 1, la somme des coefficients d'une même ligne est toujours égale à 1 : la matrice I_n est stochastique.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice stochastique. On a $a + b = 1$ et $c + d = 1$ donc on peut écrire $b = 1 - a$ et $c = 1 - d$. Par ailleurs, on a $a \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, $1 - a \geqslant 0$, $1 - d \geqslant 0$ donc $a \in [0, 1]$ et $d = [0, 1]$. Par conséquent, on obtient

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-d & d \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \in [0,1] \text{ et } d \in [0,1].$$

Une telle matrice est immédiatement stochastique. Ainsi, la forme générale d'une matrice stochastique de taille 2 est :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix} \quad \text{avec } (a,b) \in [0,1]^2.$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$.

   a) Pour $a = b = 1$, on a $A = I_2$ donc $A^p = I_2^p = I_2$.

   b) Pour $a = b = 0$, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $A^2 = I_2$. Dès lors, si $p = 2q$ est pair, on obtient $A^p = A^{2q} = (A^2)^q = I_2^q = I_2$ et si $p = 2q + 1$ est impair, on obtient $A^p = A^{2q+1} = A^{2q}A = I_2 A = A$. En résumé, on a

$$A^p = \begin{cases} I_2 & \text{si } p \text{ est pair} \\ A & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases}.$$

4. On suppose à présent $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a, b) \neq (1, 1)$. On note $U = A - I_2$.

a) On a $U = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-b & b-1 \end{pmatrix}$ et on calcule $U^2 = (a+b-2)U$. Avec $\alpha = a+b-2$, on a bien $U^2 = \alpha U$. On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$U^k = \begin{cases} I_2 \text{ si } k = 0 \\ \alpha^{k-1} U \text{ si } k \geqslant 1 \end{cases}.$$

b) Soit $p \geqslant 1$. En écrivant $A = U + I_2$ avec $I_2 U = U I_2$, grâce à la formule du binôme de Newton, il vient

$$\begin{aligned} A^p = (U+I_2)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} U^k I_2^{n-k} = I_2 + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} U^k = I_2 + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \alpha^{k-1} U \\ = I_2 + \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \alpha^k \right) U = I_2 + \frac{1}{\alpha} \left(-1 + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \alpha^k \right) U = I_2 + \frac{1}{\alpha} \left(-1 + (\alpha+1)^p \right) U \end{aligned}$$

On remarque que l'on a bien $\alpha \neq 0$ (ce qui nous autorise à écrire $\frac{1}{\alpha}$) car le cas $\alpha = 0$ correspond à $(a,b) = (1,1)$ et nous avons écarté ce cas.

c) On a $0 \leqslant a \leqslant 1$ et $0 \leqslant b \leqslant 1$ donc $0 \leqslant a+b-1 \leqslant 1$. Par ailleurs, on $(a,b) \neq (1,1)$ donc $0 \leqslant \alpha + 1 < 1$. On en déduit $\lim\limits_{p \to +\infty} (\alpha+1)^p = 0$. On en déduit

$$A^p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} I_2 - \frac{1}{\alpha} U = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha - (a-1) & a-1 \\ b-1 & \alpha - (b-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b-2} \begin{pmatrix} b-1 & a-1 \\ b-1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Remarque pour faire le lien avec la dernière question de la partie 3 : En écartant les cas $(a,b) = (1,1)$ et $(a,b) = (0,0)$, nous avons ici traité le cas d'une matrice stochastique de taille 2×2 où tous les coefficients sont strictement positifs. En posant $\alpha_1 = \frac{b-1}{a+b-2}$ et $\alpha = \frac{a-1}{a+b-2}$, on a $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ et

$$A^p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Partie 2 Généralités

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$AC = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2,j} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} A \text{ est stochastique } &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \geqslant 0 \\ \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2,j} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \geqslant 0 \\ AC = C \end{cases} . \end{aligned}$$

2. Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices stochastiques de taille n. Grâce à la question précédente, on a $AC = C$ et $BC = C$ ce qui nous permet d'écrire

$$(AB)C = A(BC) = AC = C.$$

De plus, les coefficients de A et B étant positifs, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient $c_{i,j}$ de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de AB est positif. En effet, on peut écrire

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{ik}}_{\geqslant 0} \underbrace{b_{kj}}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

Grâce à la caractérisation des matrices stochastiques obtenue lors de la question précédente, on obtient alors $AB \in ST_n$.

3. Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices stochastiques de taille n et soit $\lambda \in [0,1]$. Le coefficient $c_{i,j}$ de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de $\lambda A + (1-\lambda)B$ est positif car

$$c_{i,j} = \underbrace{\lambda}_{\geqslant 0} \underbrace{a_{i,j}}_{\geqslant 0} + \underbrace{(1-\lambda)}_{\geqslant 0} \underbrace{b_{i,j}}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

De plus, on a

$$(\lambda A + (1-\lambda)B)C = \lambda AC + (1-\lambda)BC = \lambda C + (1-\lambda)C = C.$$

Grâce à la caractérisation des matrices stochastiques, on a $\lambda A + (1-\lambda)B \in ST_n$.

4. a) La matrice M est triangulaire supérieure avec tous ses coefficients diagonaux non nuls donc elle est inversible.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$MX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + y_n = 2y_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2y_{n-1} \\ x_n = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_n \\ \vdots \\ x_{n-1} = 2y_{n-1} - y_n \\ x_n = y_n \end{cases} \Leftrightarrow X = M^{-1}Y$$

avec $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & & (0) & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 2 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

b) La matrice M de la question précédente appartient à $ST_n \cap GL_n(\mathbb{R})$ mais son inverse M^{-1} n'appartient pas à cet ensemble. En effet, la matrice M^{-1} n'a pas tous ses coefficients positifs donc n'est pas stochastique.
On remarque qu'on a démontré dans les questions précédentes :

- $I_n \in ST_n \cap GL_n(\mathbb{R})$ donc $ST_n \cap GL_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$,
- Si $(A, B) \in ST_n \cap GL_n(\mathbb{R})^2$ alors $AB \in ST_n \cap GL_n(\mathbb{R})$.
- Si $A \in ST_n \cap GL_n(\mathbb{R})$ alors $AC = C$ donc $A^{-1}C = C$. Il ne manque que de pouvoir assurer que les coefficients de A^{-1} sont positifs pour pouvoir utiliser la caractérisation des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$.

5. Les suites des coefficients des matrices A_r étant des suites de réels positifs, leurs limites sont aussi des réels positifs. Par conséquent, tous les coefficients de la matrice B sont positifs.
Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a $A_rC = C$ donc, en faisant tendre r vers $+\infty$, il vient $BC = C$.
Par conséquent, la matrice B est une matrice stochastique.

6. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a $A^rA = A^{r+1} = AA^r$. Comme $A_r \to B$ et $A^{r+1} \to B$, il vient $BA = B = AB$.
Puisque $A^r \to B$, en considérant les suites extraites des suites des coefficients, on a aussi $A^{2r} \to B$.
Par conséquent, sachant que $A^{2r} = (A^r)^2$ pour tout entier naturel r, il vient $B = B^2$.

Partie 3 Convergence de la suite des puissances

Dans toute cette partie, on notera $(a_{i,j})$ les coefficients de la matrice A et on suppose $n \geqslant 2$.

1. a)
   - On a immédiatement $m(AY) \leqslant M(AY)$ puisque le minimum d'un ensemble est inférieur au maximum de ce même ensemble.
   - Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le terme sur la ligne i de AY vérifie

$$[AY]_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{i,j}}_{\geqslant 0} \underbrace{y_j}_{\leqslant M(Y)} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} M(Y) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) M(Y) = M(Y)$$

donc $M(AY) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} [AY]_i \leqslant M(Y)$.

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le terme sur la ligne i de AY, noté $[AY]_i$, vérifie

$$[AY]_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{i,j}}_{\geqslant 0} \underbrace{y_j}_{\geqslant m(Y)} \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} m(Y) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right) m(Y) = m(Y)$$

donc $m(AY) = \min\limits_{i \in [\![1,n]\!]} [AY]_i \geqslant m(Y)$.

On a bien $m(Y) \leqslant m(AY) \leqslant M(AY) \leqslant M(Y)$.

b) Soit i un indice de ligne pour lequel $[AY]_i = M(AY)$. On a

$$\begin{aligned} M(Y) - M(AY) = M(Y) - [AY]_i = M(Y) - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} M(Y) - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{i,j}}_{\geqslant d} \underbrace{(M(Y) - y_j)}_{\geqslant 0} \geqslant \sum_{j=1}^{n} d(M(Y) - y_j) \geqslant d(M(y) - m(y)) \end{aligned}$$

car dans la dernière somme (de termes positifs), l'un des indices correspond à l'indice pour lequel $y_j = m(Y)$.

c) En sommant les deux inégalités

$$M(Y) - M(AY) \geqslant d(M(y) - m(y)) \quad \text{et} \quad m(AY) - m(Y) \geqslant d(M(Y) - m(Y)),$$

on obtient $m(AY) - M(AY) - (m(Y) - M(Y)) \geqslant 2d(M(Y) - m(Y)$ ce qui se réécrit

$$M(AY) - m(AY) \leqslant (1 - 2d)(M(Y) - m(Y)).$$

On remarque d'ores et déjà que $d > 0$ car la matrice A est supposée être à coefficients strictement positifs. Par ailleurs, en regardant une ligne i de A, on peut écrire

$$1 = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} d = nd$$

donc $d \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}$. Par conséquent, on a $d \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, ie $0 \leqslant 1 - 2d < 1$.

d) $\diamond$ Soit $k \in \mathbb{N}$. En appliquant le résultat de la question 1a à la matrice colonne $A^k Y$, il vient

$$m(A^k Y) \leqslant m(A^{k+1} Y) \leqslant M(A^{k+1} Y) \leqslant M(A^k Y) \Leftrightarrow u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant v_k \leqslant v_{k+1}.$$

Les suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ se retrouvent être respectivement décroissante et croissante.

$\diamond$ Soit $k \in \mathbb{N}$. En appliquant le résultat de la question 1c à la matrice colonne $A^k Y$, il vient

$$0 \leqslant M(A^{k+1} Y) - m(A^{k+1} Y) \leqslant (1 - 2d)(M(A^k Y) - m(A^k Y)) \Leftrightarrow 0 \leqslant v_{k+1} - u_{k+1} \leqslant (1 - 2d)(v_k - u_k).$$

On montre alors par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant v_k - u_k \leqslant (1 - 2d)^k (v_0 - u_0).$$

Sachant $0 \leqslant 1 - 2d < 1$, on a $(1 - 2d)^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Grâce au théorème des gendarmes, on obtient

$$\lim_{k \to +\infty} v_k - u_k = 0.$$

$\diamond$ Les suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

e) Les suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant adjacentes, elles convergent vers une même limite. On note ℓ_Y cette limite commune.
Pour tout indice de ligne i et tout entier naturel k, le terme sur la ligne i de A^kY vérifie

$$u_k \leqslant [A^kY]_i \leqslant v_k.$$

Grâce au théorème des gendarmes, on obtient $[A^kY]_i \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_Y$. Par définition de la convergence matricielle, on a

$$A^kY = \begin{pmatrix} [A^kY]_1 \\ \vdots \\ (A^kY]_n \end{pmatrix} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \ell_Y \\ \vdots \\ \ell_Y \end{pmatrix} = \ell_Y C \text{ avec } C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

2. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note Y_j est la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec un 1 sur la ligne j et des 0 partout ailleurs. Ainsi $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,..., $Y_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La j-ième colonne de A est alors donnée par le produit matriciel AY_j.
En appliquant le résultat de la question 1e, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ tel que

$$[\text{colonne } j \text{ de } A^k] = A^kY_j \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha_j C.$$

On en déduit

$$A^k = \begin{pmatrix} | & & | \\ A^kY_1 & \cdots & A^kY_n \\ | & & | \end{pmatrix} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} | & & | \\ \alpha_1 C & \cdots & \alpha_n C \\ | & & | \end{pmatrix} = B.$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est stochastique en tant que produit de matrices stochastiques (question 2 de la partie 2) donc B est une matrice stochastique (question 5 de la partie 2). Par conséquent, les coefficients de B sont positifs et la somme des coefficients d'une même ligne est toujours 1,

$$\textit{ie} \quad \alpha_1 \geqslant 0, ..., \alpha_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$