MATHÉMATIQUES

Devoir n°5

Vendredi 20 Janvier 2023

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants dans l'appréciation des copies. **En particulier, il est indispensable de conclure vos réponses et d'encadrer vos résultats à la règle.**

On pourra admettre le résultat d'une question après l'avoir mentionné explicitement sur sa copie.

Questions de cours :

- Justifier que la fonction $\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \overline{z} \end{cases}$ est un morphisme d'anneaux.
- Donner la définition d'un corps.
- Donner la définition de fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I avec $k \in \mathbb{N}$.
- Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction P_n définie sur $\mathbb{R}$ par $P_n(x) = (x-a)^n(x-b)^n$ où a et b sont deux réels fixés.

1. En appliquant la formule de Leibniz, déterminer une expression de $P_n^{(n)}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que, lorsque $a = b$, on a $P_n^{(n)}(x) = n!(x-a)^n \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
3. Calculer d'une autre manière $P_n^{(n)}(x)$ lorsque $a = b$.
4. En déduire une expression simplifiée de $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 2 On note $(\mathbb{U}, \cdot)$ le groupe des nombres complexes de module 1 pour la multiplication. On s'intéresse ici aux morphismes de certains de ses sous-groupes ainsi qu'au théorème de relèvement dans le cas $\mathcal{C}^1$. *Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.*
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

1. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.
2. Soit $f : \mathbb{U}_n \to \mathbb{U}_n$ un morphisme de groupes. On note $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
   a) Montrer qu'il existe $m \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $f(u) = u^m$.
   b) Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{U}_n$, on a $f(v) = v^m$.

3. Soit $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ un morphisme de groupes. On suppose que la fonction g définie ci-après est dérivable en 0.
$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(e^{it}) \end{cases}$$
   a) Donner les valeurs de $g(0)$ et $g(2\pi)$.
   b) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(t) = g'(0)g(t)$ pour tout réel t.
   c) Montrer qu'il existe un entier relatif m tel que $f(v) = v^m$ pour tout $v \in \mathbb{U}$.

4. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   a) Pour tout réel t, on note $\varphi(t) = -i\frac{g'(t)}{g(t)}$. Justifier que $\varphi(t)$ est bien défini et est un nombre réel.
   b) On note $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $h(t) = g(0)e^{i\int_0^t \varphi(x)dx}$. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $h'(t)$ à l'aide des fonctions g et h uniquement.
   c) En déduire qu'il existe une fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $g(t) = e^{i\theta(t)}$ pour tout réel t.

Problème : Dans tout ce problème, n et p désignent des entiers naturels. Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si elle vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \geqslant 0 \qquad (1)$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \qquad (2)$$

On notera ST_n l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit qu'une suite (A_r) de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (et on écrit $A_r \to B$) si les np suites réelles définies par les coefficients des matrices A_r convergent vers les coefficients correspondants de B. On admettra le fait suivant :

$$(A_r \to B \text{ et } A'_r \to B' \Rightarrow A_r + A'_r \to B + B') \text{ et } (A_r \to B \text{ et } A'_r \to B' \Rightarrow A_r A'_r \to BB')$$

lorsque ces opérations sont bien définies.

Partie 1 Matrices stochastiques de taille 2

1. Interpréter avec des mots ce que signifie qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique et justifier que I_n est une matrice stochastique.
   Dans toute la suite de cette partie, on suppose $n = 2$.

2. Montrer que la forme générale d'une matrice stochastique de taille 2 est :
$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix} \quad \text{avec } (a,b) \in [0,1]^2.$$
   Dans la suite de cette partie, on considère une matrice A de cette forme.

3. Soit $p \in \mathbb{N}$.

   a) Calculer A^p lorsque $a = b = 1$.

   b) Calculer A^p lorsque $a = b = 0$.

4. On suppose à présent $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a, b) \neq (1, 1)$. On note $U = A - I_2$.

   a) Montrer qu'il existe un réel α, à expliciter, tel que $U^2 = \alpha U$ et en déduire une expression de U^k pour tout entier naturel k.

   b) Déterminer une expression de A^p en fonction de α, p et de la matrice U (on ne demande pas d'expliciter les coefficients de la matrice A^p).

   c) En déduire que la suite de matrices $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice

$$\frac{1}{a+b-2}\begin{pmatrix} b-1 & a-1 \\ b-1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Partie 2 Généralités

1. On note $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1.
   Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si et seulement si

$$(\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{i,j} \geqslant 0) \quad \text{et} \quad AC = C.$$

2. En déduire que ST_n est stable par produit matriciel, ie si $(A, B) \in ST_n^2$ alors $AB \in ST_n$.

3. Montrer que si $(A, B) \in ST_n^2$ et $\lambda \in [0, 1]$ alors $\lambda A + (1 - \lambda)B \in ST_n$.

4. a) On note $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & (0) & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que M est inversible et déterminer M^{-1}.

   b) L'ensemble $ST_n \cap GL_n(\mathbb{R})$ est-il un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$?

5. Soit $(A_r)_{r\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de ST_n qui converge vers une matrice B. Montrer que B est une matrice stochastique.

6. Soit $A \in ST_n$. On suppose que la suite des puissances de A converge vers une matrice B, ie $A^r \to B$. Montrer que $AB = BA = B$ et $B^2 = B$.

Partie 3 Convergence de la suite des puissances

On considère dans cette partie une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastique pour laquelle **tous les coefficients sont strictement positifs** et on note d le plus petit coefficient de A.
On suppose $n \geqslant 2$ et on se propose de montrer la convergence de la suite de matrices $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et ainsi généraliser l'exemple de la partie 1.

Pour toute matrice colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note

$$m(Y) = \min\{y_1, ..., y_n\} \quad \text{et} \quad M(Y) = \max\{y_1, ..., y_n\}.$$

1. Dans cette question, on considère $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fixé. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note

$$u_k = m(A^kY) \quad \text{et} \quad v_k = M(A^kY).$$

   a) Montrer que $m(Y) \leqslant m(AY) \leqslant M(AY) \leqslant M(Y)$.
   b) Montrer que $M(Y) - M(AY) \geqslant d(M(Y) - m(Y))$. On admet que l'on a de même $m(AY) - m(Y) \geqslant d(M(Y) - m(Y))$.
   c) En déduire $M(AY) - m(AY) \leqslant (1 - 2d)(M(Y) - m(Y))$ et justifier $d \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$.
   d) Montrer que les suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   e) En déduire qu'il existe $\ell_Y \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(A^kY)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_Y C$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. Déduire de la question précédente que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B de la forme

$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ \alpha_1 C & \cdots & \alpha_n C \\ | & & | \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha_1 \geqslant 0, ..., \alpha_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$