MATHÉMATIQUES
Devoir n°4
Correction

Exercice 1 Voir correction du TD Limites et fonctions.

Exercice 2 Voir correction du TD Continuité.

Exercice 3 1. Soient (x, y) et (x', y') appartenant à G. En particulier, on a $x \in \mathbb{R}^*$ et $x' \in \mathbb{R}^*$. Puisque x et x' sont deux réels non nuls, xx' est également un réel non nul. Par conséquent, on a

$$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = G.$$

La loi $\star$ est une loi de composition interne. Pour (x, y), (x', y') et (x'', y'') appartenant à G, on vérifie

$$((x, y) \star (x', y')) \star (x'', y'') = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) = (x, y) \star ((x', y') \star (x'', y'')).$$

La loi $\star$ est associative sur G.

2. On vérifie que, pour tout $(x, y) \in G$, on a

$$(x, y) \star (1, 0) = (x, y) = (1, 0) \star (x, y)$$

et on trouve

$$(x, y) \star \left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x}\right) = (1, 0) = \left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x}\right) \star (x, y).$$

L'élément $(1, 0) \in G$ est un élément neutre pour $\star$ et tout élément admet un élément symétrique. On savait déjà que $\star$ est une loi de composition interne associative donc $(G, \star)$ est un groupe. On remarque $(1, 1) \star (2, 2) = (2, 4) \neq (2, 3) = (2, 2) \star (1, 1)$ donc ce n'est pas un groupe abélien.

Problème 1 :

Partie 1

1. a) On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc, par produit, il vient $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.
   On sait par ailleurs que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées).
   On a ainsi
   $$\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0^+.$$

   b) La fonction h est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables. Soit $x > 0$. On a
   $$h'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

   c) Soit $x > 0$. On a
   $$h'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant e.$$
   On calcule par ailleurs $h(e) = \frac{1}{e}$. En utilisant les limites de la question $1a$), on obtient alors le tableau de variation ci-dessous.

	0		e		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	
h			$1/e$		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0^+

2. Soit $\ell > 0$. On a

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow e^{a\ell} = \ell \Leftrightarrow a\ell = \ln(\ell) \Leftrightarrow \frac{\ln(\ell)}{\ell} = a \Leftrightarrow h(\ell) = a.$$

Grâce au tableau de variation de h établi lors de la question précédente, on obtient immédiatement :

- si $a > \frac{1}{e}$, l'équation $h(\ell) = a \Leftrightarrow f(\ell) = \ell$ ne possède pas de solution,
- si $a = \frac{1}{e}$, l'équation $h(\ell) = a \Leftrightarrow f(\ell) = \ell$ possède une unique solution $\ell = e$,
- si $0 < a < e$, , l'équation $h(\ell) = a \Leftrightarrow f(\ell) = \ell$ possède deux solutions,
- si $a \leqslant 0$, , l'équation $h(\ell) = a \Leftrightarrow f(\ell) = \ell$ possède une unique solution.

Partie 2

On suppose dans cette partie que $a \geqslant 0$.

1. Pour tout réel x, on a $f'(x) = ae^{ax} \geqslant 0$ car $a \geqslant 0$. Par conséquent, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}.$$

• Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = 1$ donc on a bien $u_0 \leqslant u_1$.
• Supposons que l'on ait $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. On peut écrire $u_n \leqslant u_{n+1}$, par hypothèse de récurrence, donc

$$u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) = u_{n+2} \qquad \text{par croissance de } f.$$

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$, ie (u_n) est croissante.

3. On a (u_n) qui est croissante donc, grâce au théorème des limites monotones, on a soit (u_n) qui converge vers une limite finie, soit (u_n) tend vers $+\infty$.
Si (u_n) admet une limite finie ℓ alors, la fonction f étant continue, cette limite est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$. Or, pour $a > \frac{1}{e}$, cette équation n'admet pas de solution d'après la question 2 de la partie 1. On en déduit que (u_n) n'admet pas de limite finie.
Par conséquent, si $a > \frac{1}{e}$, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

4. On suppose que $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{e}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant e.$$

• Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 0 \leqslant e$.
• Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $u_n \leqslant e$. En utilisant la croissance de la fonction f, on peut alors écrire

$$u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(e) = e^{ae} \leqslant e^1 = e \text{ car } ae \leqslant 1 \text{ par hypothèse.}$$

On a donc bien $u_{n+1} \leqslant e$ ce qui achève la récurrence.
Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant e$, ie la suite (u_n) est majorée par e.

Par ailleurs, on a montré que (u_n) est croissante lors de la question 2 donc, en tant que suite croissante et majorée, on déduit que (u_n) converge (vers l'unique solution dans $]0, e]$ de l'équation $h(\ell) = a$).

Partie 3

On suppose dans cette partie que $a < 0$.

1. Pour tout réel x, on a $f'(x) = ae^{ax} < 0$ car $a < 0$. Par conséquent, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

• Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 0 \in [0, 1]$.
• Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. En utilisant la décroissance de la fonction f, on obtient

$$f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(0), \quad \text{ie } 0 < e^a \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

On a donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ ce qui achève la récurrence.
Par conséquent, la suite (u_n) est à valeurs dans $[0, 1]$.

b) On a $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n}) = f \circ f(u_{2n})$. La fonction $f \circ f$ étant croissante, en tant que composée de deux fonctions décroissantes, il vient que la suite (u_{2n}) est monotone.
On a de même $u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$ avec $f \circ f$ croissante donc la suite (u_{2n+1}) est monotone.

c) La suite (u_{2n}) est à valeurs dans $[0, 1]$ en tant que sous-suite de (u_n) qui est à valeurs dans $[0, 1]$ (question 2a). Donc (u_{2n}) est bornée.
Par ailleurs, on vient de montrer en 2b que (u_{2n}) est monotone. Par conséquent, on a soit (u_{2n}) croissante et majorée par 1 donc convergente, soit (u_{2n}) est décroissante et minorée par 0 donc convergente.
Dans tous les cas, la suite (u_{2n}) converge. On montre de même que (u_{2n+1}) est convergente.

3. Soit $x \in]0, 1[$. On a
$$f \circ f(x) = f(f(x)) = e^{af(x)} = e^{ae^{ax}}.$$

Par conséquent, on peut écrire

$$\begin{aligned}
(f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow e^{ae^{ax}} = x \Leftrightarrow ae^{ax} = \ln(x) & \\
\Leftrightarrow e^{ax} = \frac{\ln(x)}{a} & \quad \left(\text{on a } a < 0 \text{ et } \ln(x) < 0, \text{ car } x \in]0,1[, \text{ donc } \frac{\ln(x)}{a} > 0\right) \\
\Leftrightarrow ax = \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) & \\
\Leftrightarrow ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = 0. &
\end{aligned}$$

Dans toute la suite, on suppose $-e < a < 0$.

4. a) Soit $x \in]0,1[$. On a d'une part

$$g'(x) = a - \frac{\left(\frac{\ln(x)}{a}\right)'}{\frac{\ln(x)}{a}} = a - \frac{\frac{1}{ax}}{\frac{\ln(x)}{a}} = a - \frac{1}{x\ln(x)}.$$

D'autre part, on a

$$g''(x) = \frac{(x\ln(x))'}{(x\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) + x\dfrac{1}{x}}{(x\ln(x))^2} = \frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}.$$

b) On a

$$g''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant -1 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{e}.$$

On a d'une part $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x\ln(x)} = -\infty$ puis $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) = +\infty$. D'autre part, on a $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x\ln(x)} = -\infty$ puis $\lim\limits_{x\to 1^-} g'(x) = +\infty$.

On calcule également $g'\left(\frac{1}{e}\right) = a - \frac{1}{-1/e} = a + e$. L'hypothèse $a > -e$ implique donc $g'\left(\frac{1}{e}\right) > 0$. On obtient alors le tableau de variation suivant.

x	0		$\frac{1}{e}$		1
g''		$-$	0	$+$	
g'	$+\infty$	$\searrow$	$a+e>0$	$\nearrow$	$+\infty$
g'			$+$		
g	$-\infty$	$\nearrow$	$g(1/e)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{a} = +\infty$ $(a<0)$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$. D'autre part, on a $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\ln(x)}{a} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = -\infty$ puis $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$.

c) On a $a + e > 0$ donc, pour tout réel x, $g'(x) > 0$. Par conséquent, la fonction g est strictement croissante sur $]0,1[$. Par ailleurs, en tant que somme et composée de fonctions continues, la fonction g est continue.

Par conséquent, en tant que fonction continue et strictement croissante, la fonction g réalise une bijection de $]0,1[$ sur $g(]0,1[) = \mathbb{R}$ (car $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$).

5. La fonction $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ étant bijective, l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution que l'on note ℓ. De plus, on a montré lors de la question 3, que $(f\circ f)(x) = x$ si et seulement si $h(x) = 0$. Par conséquent, l'équation $(f\circ f)(x) = x$ possède une et une seule solution ℓ dans $]0,1[$.

Par ailleurs, on a $(f\circ f)(0) = f(f(0)) = f(1) = e^a \neq 0$ et $(f\circ f)(1) = f(f(1)) = f(e^a) = e^{ae^a} \neq 1$ car $ae^a \neq 0$.

Par conséquent, l'équation $(f\circ f)(x) = x$ possède une et une seule solution ℓ dans $[0,1]$.

6. On a montré lors de la question $2c$ que (u_{2n}) est convergente. Comme (u_{2n}) est à valeurs dans $[0,1]$ (question $2a$), on obtient que (u_{2n}) converge vers un réel ℓ' appartenant à $[0,1]$.

   Par ailleurs, la suite (u_{2n}) étant construite par itération de la fonction continue $f \circ f$ (en effet, on a déjà vu la relation $u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$), la limite ℓ' de (u_{2n}) est un point fixe de la fonction $f \circ f$, ie $f \circ f(\ell') = \ell'$.

   Or, on a montré lors de la question 5, que l'équation $(f \circ f)(x) = x$ possède une et une seule solution dans $[0,1]$ que l'on a noté ℓ. On en déduit $\ell' = \ell$.

   Autrement dit, la suite (u_{2n}) converge vers l'unique solution ℓ dans $[0,1]$ de l'équation $(f \circ f)(x) = x$. On montre exactement de la même manière que la suite (u_{2n+1}) converge vers ℓ.

   Les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergeant vers une même limite ℓ, on déduit que la suite (u_n) converge également vers ℓ qui est l'unique solution dans $[0,1]$ de l'équation $(f \circ f)(x) = x$.

Problème 2 :

Partie 1 Sur les périodes d'une fonction continue

1. Si f est une fonction constante, n'importe quel réel a est une période de f puisque, pour tout réel x, on a $f(x+a) = f(x)$. Par conséquent, on a $\Omega_f = \mathbb{R}$.

2. On a $\Omega_f \subset \mathbb{R}$.

   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+0) = f(x)$ donc 0 est une période de f. Ainsi $0 \in \Omega_f$ et $\Omega_f \neq \emptyset$.
   - Soit $(T_1, T_2) \in \Omega_f^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
   $$\begin{aligned} f(x+T_1+T_2) &= f(x+T_1) \quad \text{car } f \text{ est } T_2\text{-périodique,} \\ &= f(x) \quad \text{car } f \text{ est } T_1\text{-périodique.} \end{aligned}$$
     Ainsi, $T_1 + T_2$ est une période de f et $T_1 + T_2 \in \Omega_f$.
   - Soit $T \in \Omega_f$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
   $$\begin{aligned} f(x-T) &= f(x-T+T) \quad \text{car } f \text{ est } T\text{-périodique,} \\ &= f(x). \end{aligned}$$
     Le réel $-T$ est une période de f donc $-T \in \Omega_f$.

   Grâce à la caractérisation des sous-groupes, Ω_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

3. Soit T une période non nulle de f. Quitte à considérer $-T$ qui est aussi une période de f, on peut supposer $T > 0$. La fonction $f_{|[0,T]} : [0,T] \to \mathbb{R}$ est bornée en tant que fonction continue sur un segment. Autrement dit,
   $$\exists K > 0, \quad \forall x \in [0,T] \quad |f(x)| \leqslant K.$$
   On utilise la périodicité de f pour montrer que cette majoration est valable sur tout $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
   $$\left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor \leqslant \frac{x}{T} < \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor + 1 \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T \leqslant x < \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T + T \Leftrightarrow 0 \leqslant x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T < T.$$
   Dès lors
   $$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f\left(x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T\right) \right| \quad \text{car } f \text{ est } T-\text{périodique et } \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor \in \mathbb{Z}, \\ &\leqslant K \quad \text{car } x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T \in [0,T]. \end{aligned}$$
   Ainsi, il existe $K > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|f(x)| \leqslant K$. La fonction f est bornée.

4. On suppose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et non constante.

   a) La fonction f est supposée périodique donc elle admet une période T non nulle. On a vu qu'alors $-T$ est également une période donc, que T soit positif ou non, $|T|$ est une période de f strictement positive, ie $|T| \in \Omega_f \cap]0, +\infty[$. En tant que partie de $\mathbb{R}$, non vide et minorée (par 0), l'ensemble $\Omega_f \cap]0, +\infty[$ admet une borne inférieure.

   b) Puisque $\Omega_f \cap]0, +\infty[$ est minoré par 0, on sait déjà $0 \leqslant T_f$. On montre $T_f > 0$ en raisonnant par l'absurde. On suppose $T_f = 0$. Grâce à la caractérisation des bornes inférieures, il existe une suite (τ_n) de périodes de f strictement positives telle que $\tau_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T_f = 0$.

   ⋄ Méthode 1 : La fonction f est non constante donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$. On pose alors $\varepsilon = |f(x_0) - f(0)|/2 > 0$. La fonction f est continue en 0 donc il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$|x - 0| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon \qquad (\star)$$

   Par ailleurs, puisque $\tau_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \tau_{n_0} \leqslant \eta$.
   De plus, on peut choisir $n \in \mathbb{Z}$ de telle sorte que $x_0 - n\tau_{n_0} \in [0, \tau_{n_0}[\subset [-\eta, \eta]$ (en effet $0 \leqslant x_0 - n\tau_{n_0} < \tau_{n_0} \Leftrightarrow n \leqslant \frac{x_0}{\tau_{n_0}} < n + 1 \Leftrightarrow n = \left\lfloor \frac{x_0}{\tau_{n_0}} \right\rfloor$). Grâce à $(\star)$, on obtient

$$\begin{aligned} |f(x_0 - n\tau_{n_0}) - f(0)| \leqslant \varepsilon &\Leftrightarrow |f(x_0) - f(0)| \leqslant \varepsilon \text{ car } \tau_{n_0} \text{ est une période de } f \\ &\Leftrightarrow |f(x_0) - f(0)| \leqslant \frac{|f(x_0) - f(0)|}{2} \quad \text{par définition de } \varepsilon \end{aligned}$$

   ce qui est absurde. Par conséquent, on a $T_f > 0$.

   ⋄ Méthode 2 : La fonction f est bornée et atteint ses bornes (voir question 3). On note $m = \inf\{f(x),\ x \in \mathbb{R}\} = \min\{f(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ et $M = \sup\{f(x),\ x \in \mathbb{R}\} = \max\{f(x),\ x \in \mathbb{R}\}$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f étant τ_n-périodique, il existe $(c_n, d_n) \in [0, \tau_n]^2$ tel que que $f(c_n) = m$ et $f(d_n) = M$.
   Sachant que f est continue en 0 et $0 \leqslant c_n, d_n \leqslant \tau_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} f(c_n) = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(d_n) = f(0).$$

   Puisque les suites $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont également constantes égales à m et M, par unicité de la limite, il vient $f(0) = m$ et $f(0) = M$.
   Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(0) = m \leqslant f(x) \leqslant M = f(0)$. La fonction f se retrouve être constante ce qui est exclu.

   c) On sait déjà que $T_f \in]0, +\infty[$ grâce à la question précédente. Il reste à montrer que $T_f \in \Omega_f$, ie que f est T_f-périodique.
   Puisque $T_f = \inf \Omega_f \cap]0, +\infty[$, il existe une suite (τ_n) de périodes de f strictement positives telle que $\tau_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T_f$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x + \tau_n) = f(x)$ car $\tau_n \in \Omega_f$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue en $x + T_f$, en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $f(x + T_f) = f(x)$. Cette relation étant valable pour tout réel x, la fonction f est T_f-périodique et $T_f = \min \Omega_f \cap]0, +\infty[$.

5. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est non constante et tous les rationnels sont des périodes de cette fonction. En effet, la somme de deux rationnels est rationnelle et la somme d'un irrationnel et d'un rationnel est irrationnelle. L'ensemble $\mathbb{Q}^{+*}$ n'admettant pas de plus petit élément, la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'admet pas de plus petite période.

6. a) ⋄ Puisque T_f est une période de f, tous les réels de la forme nT_f avec $n \in \mathbb{Z}$ sont aussi des périodes de f, ie $T_f\mathbb{Z} \subset \Omega_f$.
⋄ Soit $T \in \Omega_f$. On note $n = \left\lfloor \frac{T}{T_f} \right\rfloor$ de telle sorte que $\tau = T - nT_f$ vérifie $T = nT_f + \tau$ et
$$n \leqslant \frac{T}{T_f} < n+1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \tau < T_f.$$
Si $\tau \neq 0$ alors $\tau = T - nT_f$ est une période de f strictement positive, ie $T \in \Omega_f \cap]0, +\infty[$, et T est strictement plus petite que T_f qui est le plus petit élément de $\Omega_f \cap]0, +\infty[$. Ceci est impossible donc $\tau = 0$ et $T = nT_f \in T_f\mathbb{Z}$. On en déduit $\Omega \subset T_f\mathbb{Z}$.
⋄ Par double inclusion, il vient $\Omega_f = T_f\mathbb{Z}$.

b) Soient T_1 et T_2 sont deux périodes non nulles de f. On a :
- $T_1 \in \Omega_f = T_f\mathbb{Z}$ donc il existe $p \in \mathbb{Z}^*$ tel que $T_1 = pT_f$ ($p \neq 0$ car $T_1 \neq 0$).
- $T_2 \in \Omega_f = T_f\mathbb{Z}$ donc il existe $q \in \mathbb{Z}^*$ tel que $T_2 = qT_f$ ($q \neq 0$ car $T_2 \neq 0$).

Par conséquent, on peut écrire $\frac{T_1}{T_2} = \frac{pT_f}{qT_f} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Partie 2 Somme de fonctions périodiques

1. a) Puisque cos est 2π-périodique, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\cos\cos(2\pi(x+1)) = \cos(2\pi x+2\pi) = \cos(2\pi x) \text{ et } \cos(\pi\sqrt{2}(x+\sqrt{2})) = \cos(\pi\sqrt{2}x+2\pi) = \cos(\pi\sqrt{2}x).$$
Par conséquent, fonctions $x \mapsto \cos(2\pi x)$ et $x \mapsto \cos(\pi\sqrt{2}x)$ sont respectivement 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique.

b) Par l'absurde, on suppose qu'il existe $T \neq 0$ tel que f soit T-périodique. En particulier, on a
$$2 = f(0) = f(T) = \underbrace{\cos(2\pi T)}_{\leqslant 1} + \underbrace{\cos(\pi\sqrt{2}T)}_{\leqslant 1}$$
donc $\cos(2\pi T) = 1$ et $\cos(\pi\sqrt{2}T) = 1$. On en déduit $2\pi T \equiv 0[2\pi]$ et $\pi\sqrt{2}T \equiv 0[2\pi]$. Autrement dit, il existe $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $2\pi T = 2\pi p$ et $\pi\sqrt{2}T = 2\pi q$ (p et q non nuls car $T \neq 0$). Il vient alors
$$\sqrt{2} = \frac{2\pi T}{\pi\sqrt{2}T} = \frac{2\pi p}{2\pi q} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$
ce qui est faux. Par conséquent, la fonction f n'est pas périodique. On vient de donner un exemple d'une somme de fonctions périodiques qui n'est pas une fonction périodique.

2. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{T_g}{T_h} = \frac{p}{q}$. On note $T = qT_g = pT_h$.
La fonction g est T_g-périodique donc $qT_g = T$ est également une période de g. De même, la fonction h est T_h-périodique donc $pT_h = T$ est également une période de h. Par conséquent, pour tout réel x, on a $g(x+T) + h(x+T) = g(x) + h(x)$, ie la fonction $g+h$ est T-périodique.

3. a) ⋄ Pour tout réel x, puisque g est T_g-périodique, on peut écrire :
$$f(x+T_g) = g(x+T+T_g) - g(x+T_g) = g(x+T) - g(x) = f(x),$$
ie f est T_g-périodique.
⋄ Par ailleurs, puisque $g+h$ est T-périodique, pour tout réel x, on a $g(x+T) + h(x+T) = g(x) + h(x)$ ce qui donne une autre expression de f :
$$f : x \mapsto h(x) - h(x+T).$$

Puisque h est T_h-périodique, on peut écrire :

$$f(x+T_h) = h(x+T_h) - h(x+T+T_h) = h(x) - h(x+T) = f(x),$$

ie f est T_h-périodique.

b) On déduit de la question précédente que, pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, la fonction f est à la fois nT_g-périodique et mT_h-périodique, ie $nT_g \in \Omega_f$ et $mT_h \in \Omega_f$. Puisque Ω_f a une structure de groupe, il vient $nT_g + mT_h \in \Omega_f$.
On a bien $T_g\mathbb{Z} + T_h\mathbb{Z} \subset \Omega_f$.

c) L'ensemble $T_g\mathbb{Z}+T_h\mathbb{Z}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, on peut écrire 0 comme limite d'une suite d'éléments de $T_g\mathbb{Z}+T_h\mathbb{Z}$. Puisque $T_g\mathbb{Z}+T_h\mathbb{Z} \subset \Omega_f$, 0 est limite d'une suite d'éléments de Ω_f et on en déduit que $\Omega_f \cap]0,+\infty[$ n'admet pas de plus petit élément, ie f n'admet pas de plus petite période. La fonction f est continue en tant que somme de fonctions continues donc, grâce aux résultats de la partie 1, la fonction f est constante.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \ell$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant apparaître une somme télescopique, on a

$$g(nT) - g(0) = \sum_{k=0}^{n-1} g((k+1)T) - g(kT) = \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) = \sum_{k=0}^{n-1} \ell = n\ell.$$

Cette relation est encore valable pour $n = 0$ puisqu'elle se réécrit $0 = 0$.
Si $\ell \neq 0$, on obtient alors $\lim\limits_{n\to+\infty} g(nT) = \pm\infty$ selon le signe de ℓ. En particulier, la fonction g n'est pas bornée ce qui contredit le résultat de la question 3 de la partie 1 (une fonction continue et périodique est bornée). On en déduit $\ell = 0$.

e) Puisque $\ell = 0$, pour tout réel x, on a $f(x) = 0$, ie $g(x+T) = g(x)$. La fonction g est alors T-périodique. En utilisant le résultat de la question 6a de la partie 1, on sait $T \in \Omega_g = T_g\mathbb{Z}$ donc il existe un entier q non nul tel que $T = qT_g$.
En utilisant l'expression de $f : x \mapsto h(x) - h(x+T)$, on montre également que h est T-périodique. Ainsi, on a $T \in \Omega_h = T_h\mathbb{Z}$ donc il existe un entier p non nul tel que $T = pT_h$.
On a ainsi $pT_h = T = qT_g$ ce qui donne $\frac{T_g}{T_h} = \frac{p}{q}$. Ceci contredit l'hypothèse $\frac{T_g}{T_h}$ irrationnel. On en déduit que la fonction $g + h$ n'est pas périodique.