MATHÉMATIQUES

Devoir n°4

Jeudi 15 Décembre 2022

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants dans l'appréciation des copies. **En particulier, il est indispensable de conclure vos réponses et d'encadrer vos résultats à la règle.**

On pourra admettre le résultat d'une question après l'avoir mentionné explicitement sur sa copie.

Questions de cours :

- Donner la définition de suites adjacentes.
- Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- Pour $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$, donner la définition de $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- Énoncer la caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ en $a \in I$.

Exercice 1 Déterminer les limites suivantes :

$$a) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}, \qquad b) \quad \lim_{x \to 0} x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \qquad c) \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^{12} - 1}{x^{33} - 1}.$$

Exercice 2 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ telle que $[a, b] \subset f([a, b])$. Montrer que f admet un point fixe.

On prendra garde à bien énoncer clairement le(s) théorème(s) utilisé(s) et ses hypothèses.

Exercice 3 On note $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Pour tous éléments (x, y) et (x', y') de G, on pose

$$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y).$$

1. Montrer que $\star$ est une loi de composition interne associative sur G.
2. Vérifier que $(G, \star)$ est un groupe. Est-il abélien ?

Problème 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f : \begin{cases} [0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{ax} \end{cases}.$$

On note (u_n) la suite réelle définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Partie 1

On note h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.
   b) Déterminer la fonction dérivée h' de h.
   c) Établir le tableau de variation de la fonction h.
2. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(\ell) = \ell$ selon les valeurs de a.

Partie 2

On suppose dans cette partie que $a \geqslant 0$.

1. Justifier que f est monotone et préciser sa monotonie.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. On suppose que $a > \frac{1}{e}$. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
4. On suppose que $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{e}$. Montrer que la suite (u_n) est majorée par e. Qu'en conclure ?

Partie 3

On suppose dans cette partie que $a < 0$.

1. Justifier que f est monotone et préciser sa monotonie.
2. a) Montrer que (u_n) est à valeurs dans $[0, 1]$.
   b) Démontrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
   c) Démontrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.
3. Démontrer que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$(f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = 0.$$

Dans toute la suite, on suppose $-e < a < 0$.

4. On note g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g : \begin{cases}]0,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) \end{cases}$.

   a) Pour tout réel $x \in]0,1[$, calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
   b) En déduire les variations de la fonction g.
   c) Montrer que g réalise une bijection de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

5. Montrer que l'équation $(f \circ f)(x) = x$ possède une et une seule solution dans $[0,1]$ (Attention, l'intervalle est fermé).

6. En déduire que (u_n) converge.

Problème 2 : Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit qu'un réel T est une période de f ou que f est T-périodique, si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+T) = f(x)$. On dit qu'une fonction est périodique si elle admet une période non nulle. Dans ce cas, on note Ω_f l'ensemble des périodes de f.

Partie 1 Sur les périodes d'une fonction continue

Dans cette partie, sauf mention contraire, on suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et périodique.

1. Dans cette seule question, on suppose que f est une fonction constante. Quel est l'ensemble Ω_f ?

2. Montrer que Ω_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

3. Justifier que f est toujours une fonction bornée.

4. On suppose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et non constante.

   a) Justifier que $\Omega_f \cap]0, +\infty[$ admet une borne inférieure notée T_f.
   b) ($\star$) Montrer que T_f est un réel strictement positif. *On pourra raisonner par l'absurde et poser* $\varepsilon = \frac{|f(x_0) - f(0)|}{2}$ *pour un réel* x_0 *tel que* $f(x_0) \neq f(0)$.
   c) Justifier que $T_f = \min \Omega_f \cap]0, +\infty[$. On dit que T_f est la plus petite période de f.

5. Donner un exemple de fonction périodique non constante et non continue n'admettant pas de plus petite période.

6. On suppose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, non constante et on note T_f la plus petite période de f.

   a) Montrer que $\Omega_f = T_f\mathbb{Z}$ où $T_f\mathbb{Z} = \{nT_f, \ \ n \in \mathbb{Z}\}$.
   b) En déduire que si T_1 et T_2 sont deux périodes non nulles de f alors $\frac{T_1}{T_2}$ est rationnel.

Partie 2 Somme de fonctions périodiques

1. a) Justifier que les fonctions $x \mapsto \cos(2\pi x)$ et $x \mapsto \cos(\pi\sqrt{2}x)$ sont périodiques.

   b) Montrer que $f : x \mapsto \cos(2\pi x) + \cos(\pi\sqrt{2}x)$ n'est pas périodique. Qu'en conclure ? *On pourra raisonner par l'absurde et considérer $f(0)$.*

Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, périodiques et non constantes. On note T_g et T_h les plus petites périodes de g et de h.

2. Montrer que si $\frac{T_g}{T_h}$ est rationnel alors $g + h$ est une fonction périodique.

3. Dans toute la suite, on suppose que $\frac{T_g}{T_h}$ est irrationnel et on se propose de montrer par l'absurde que $g + h$ n'est pas périodique.
   On suppose que $g + h$ admet une période non nulle T. On considère alors la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto g(x + T) - g(x)$.

   a) Montrer que f est T_g-périodique et T_h-périodique.

   b) On note $T_g\mathbb{Z} + T_h\mathbb{Z} = \{nT_g + mT_h, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$. Justifier que $T_g\mathbb{Z} + T_h\mathbb{Z} \subset \Omega_f$.

   c) On admet que $T_g\mathbb{Z} + T_h\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante. On note ℓ la valeur de cette constante.

   d) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g(nT) - g(0) = n\ell$ et en déduire $\ell = 0$.

   e) En déduire que $\frac{T_g}{T_h}$ est rationnel et conclure.