MATHÉMATIQUES

Devoir n°3

Correction

Exercice 1 1. Pour tout réel x, on a $\cos(x) \in [-1, 1]$ donc $2 - \cos(x) \in [1, 3]$. En particulier, pour tout réel x, on a

$$2 - \cos x > 0.$$

On en déduit que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions cos et sin étant respectivement paire et impaire, on peut écrire

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 - \cos(-x)} = \frac{-\sin x}{2 - \cos x} = -f(x).$$

La fonction f est impaire.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions cos et sin étant 2π-périodiques, on peut écrire

$$f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{2 - \cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin x}{2 - \cos x} = f(x).$$

Don f est 2π-périodique.

c) La fonction f étant 2π-périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[\pi, \pi]$, pour pouvoir tracer sa courbe représentative par translation sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, la fonction f étant impaire, il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$, la courbe sur $[-\pi, \pi]$ s'obtenant alors par une symétrie par rapport à l'origine du repère.

3. Les fonctions cos et sin étant dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel x, on a

$$f'(x) = \frac{\cos(x)(2 - \cos x) - \sin(x)\sin(x)}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}.$$

4. On a $f(\pi) = \frac{\sin \pi}{2 - \cos \pi} = 0$ et $f'(\pi) = \frac{-1 + 2\cos \pi}{(2 - \cos \pi)^2} = \frac{-3}{3^2} = -\frac{1}{3}$ donc la tangente à la courbe représentative de f est la droite d'équation

$$y = f'(\pi)(x - \pi) + f(\pi) = \frac{1}{3}(\pi - x).$$

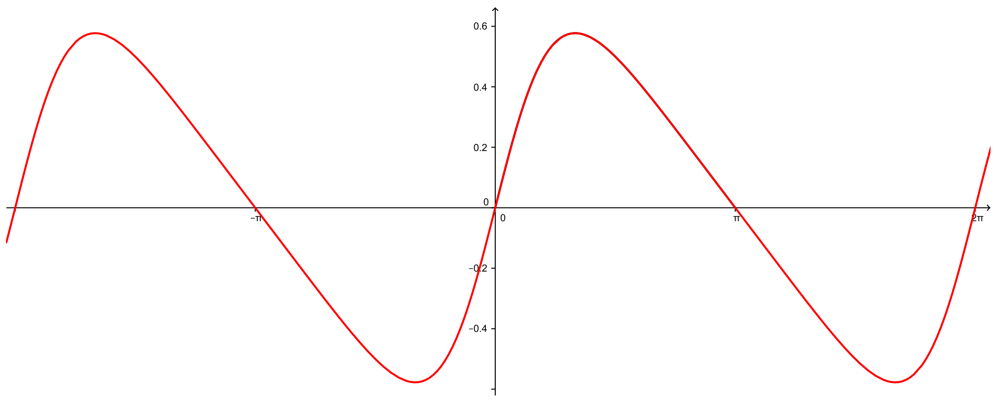
5. a) Pour $x \in [0, \pi]$, on a

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos x \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

b) On a $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. On obtient ainsi le tableau de variation suivant.

	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

c) On commence par tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, \pi]$ à l'aide du tableau de variation précédent, puis on prolonge cette courbe par imparité sur $[-\pi, \pi]$, puis sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité comme expliqué lors de la question $2c$). On obtient :



6. a) L'équation homogène associée à (E) s'écrit

$$y'(x) + \frac{\sin x}{2 - \cos x} y(x) = 0.$$

Une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{\sin x}{2-\cos x}$ (de la forme $\frac{U'}{U}$) est $x \mapsto \ln(2 - \cos x)$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{-\ln(2-\cos x)} = \frac{\lambda}{2 - \cos x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

b) En appliquant la méthode de variation de la constante, on recherche une solution particulière à l'équation (E) de la forme

$$f_p : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda(x)}{2-\cos x} \end{cases}$$

où $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable à déterminer. Pour tout réel x, on a

$$f_p'(x) = \frac{\lambda'(x)(2 - \cos x) - \lambda(x)\sin(x)}{(2 - \cos x)^2}.$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
&f_p \text{ est solution de } (E)\\
\Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\quad f_p'(x) + \frac{\sin x}{2-\cos x} f_p(x) = 2\sin x\\
\Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{\lambda'(x)(2-\cos x) - \lambda(x)\sin(x)}{(2-\cos x)^2} + \frac{\sin x}{2-\cos x}\frac{\lambda(x)}{2-\cos x} = 2\sin x\\
\Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{\lambda'(x)(2-\cos x)}{(2-\cos x)^2} = 2\sin x\\
\Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R},\quad \lambda'(x) = 2\sin(x)(2-\cos x).
\end{aligned}$$

Or, on a $x \mapsto 2\sin(x)(2-\cos x)$ qui est de la forme $2U'U$ avec $U(x) = 2-\cos x$ donc le choix $\lambda(x) = (2-\cos x)^2$ convient. Il s'ensuit que

$$x \mapsto \frac{\lambda(x)}{2-\cos x} = \frac{(2-\cos x)^2}{2-\cos x} = 2-\cos x$$

est une solution particulière de l'équation (E).
Conclusion : En utilisant les résultats des questions $6a$, on obtient que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto \frac{\lambda}{2-\cos x} + 2 - \cos x \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

c) En utilisant le résultat précédent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = \frac{\lambda}{2-\cos x} + 2 - \cos x.$$

Dès lors, la condition $h(0) = 1$ se réécrit

$$h(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2-\cos 0} + 2 - \cos 0 = 1 \Leftrightarrow \lambda + 1 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

Par conséquent, l'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} h' + \frac{\sin x}{2-\cos x} h = 2\sin x \\ h(0) = 1 \end{cases}$ est la fonction

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2 - \cos x \end{cases}.$$

Problème 1 :

Partie 1 Un exemple

1. On a $1 = 36 - 35 = 3 \times 12 - 5 \times 7$ donc $12 \times 300 + 7 \times (-500) = 100$. Le choix $u = 300$ et $v = -500$ convient.

2. On a $12x + 7y = 100$ et $12u + 7v = 100$ donc $12(x-u) = 7(v-y)$. Ainsi 7 divise $12(x-u)$ et $7 \wedge 12 = 1$ donc, grâce au lemme de Gauss, on a 7 qui divise $x - u$. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $7k = x - u$, ie $x = u + 7k$. En revenant à $12(x-u) = 7(v-y)$, on peut écrire $12 \times 7k = 7(v-y)$ donc $v - y = 12k$ et $y = v - 12k$. Les solutions de $12x + 7y = 100$ sont les couples (x, y) de la forme $(300 + 7k, -500 - 12k)$ avec k qui décrit $\mathbb{Z}$.

3. On cherche les entiers k relatifs tels que

$$\begin{cases} 300+7k \geqslant 0 \\ -500-12k \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geqslant -\frac{300}{7} = -42-\frac{6}{7} \\ k \leqslant -\frac{500}{12} = -41-\frac{8}{12} \end{cases} \Leftrightarrow -42-\frac{6}{7} \leqslant k \leqslant -41-\frac{2}{3} \Leftrightarrow k=-42.$$

Il n'y a qu'une seule solution dans $\mathbb{N}^2$ à notre équation diophantienne : il s'agit de $(x,y)=(300-7\times 42, -500+12\times 42)=(6,4)$.

Partie 2 Théorème de Popoviciu

1. • Existence : On a supposé $a \wedge b = 1$ donc a est inversible modulo b. Ainsi, il existe $\tilde{a} \in \mathbb{Z}$ tel que $a\tilde{a} \equiv 1[b]$. En effectuant la division euclidienne de $\tilde{a}$ par b, il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{Z}$ tels que $0 \leqslant r < b$ et $\tilde{a} = bq + r$. En particulier, on a $\tilde{a} \equiv r[b]$ donc $ar \equiv 1[b]$. Enfin, on ne peut avoir $r = 0$ car sinon $1 \equiv 0[b]$ ce qui est faux. L'entier r vérifie bien $1 \leqslant r \leqslant b-1$ et $ar \equiv 1[b]$.
   • Unicité : Si $\tilde{a}$ et $\tilde{\tilde{a}}$ sont deux entiers de $\{1,...,b-1\}$ tels que $a\tilde{a} \equiv 1[b]$ et $a\tilde{\tilde{a}} \equiv 1[b]$. On a alors $a\tilde{a} \equiv a\tilde{\tilde{a}}[b]$ donc $a(\tilde{a}-\tilde{\tilde{a}}) \equiv 0[b]$, autrement dit b divise $a(\tilde{a}-\tilde{\tilde{a}})$. Puisque $a \wedge b = 1$, grâce au lemme de Gauss, on obtient $b|\tilde{a}-\tilde{\tilde{a}}$. Sachant $-(b-1) \leqslant \tilde{a}-\tilde{\tilde{a}} \leqslant b-1$, il ne reste que la possibilité $\tilde{a}-\tilde{\tilde{a}}=0$, ie $\tilde{a}=\tilde{\tilde{a}}$.
   • En échangeant les rôles de a et de b, on montre de même qu'il existe un unique élément de $\{1,...,a-1\}$, noté b^{-1} tels que $bb^{-1} \equiv 1[a]$.

2. a) On a $aa^{-1} \equiv 1[b]$ et $bb^{-1} \equiv 1[a]$ donc il existe des entiers k et k' tels que $aa^{-1} = 1+kb$ et $bb^{-1} = 1+k'b$. Ainsi

$$kk'ab = (aa^{-1}-1)(bb^{-1}-1) = aba^{-1}b^{-1} - aa^{-1} - bb^{-1} + 1.$$

   En regardant la congruence modulo ab, on obtient $aa^{-1}+bb^{-1} \equiv 1[ab]$.
   Or $a^{-1}a - b'b = a^{-1}a - (a-b^{-1})b = a^{-1}a + b^{-1}b - ab \equiv a^{-1}a + b^{-1}b[ab]$. On obtient bien $a^{-1}a - b'b \equiv 1[ab]$.

   b) On vient de prouver qu'il existe un entier c tel que $a^{-1}a - b'b = 1 + abc$. Par ailleurs, on a :
   - $1 \leqslant b^{-1} \leqslant a-1$ donc $1 \leqslant b' = a - b^{-1} \leqslant a-1$ puis $b \leqslant bb' \leqslant b(a-1)$,
   - $1 \leqslant a^{-1} \leqslant b-1$ donc $a \leqslant aa^{-1} \leqslant a(b-1)$,

   ce qui donne

$$a - b(a-1) \leqslant a^{-1}a - b'b \leqslant a(b-1) - b \Leftrightarrow -(ab-a-b) \leqslant abc+1 \leqslant ab-a-b$$

   . donc $|abc+1| \leqslant ab-a-b$. Enfin, on a

$$|abc| = |abc+1-1| \leqslant |abc+1| + |-1| \leqslant ab-a-b+1 = (a-1)(b-1) < ab.$$

   On en déduit $c=0$ puis $a^{-1}a - b'b = 1$.

   c) Grâce à la question précédente, on obtient une solution particulière de (E_n). À savoir

$$a \times (na^{-1}) + b \times (-nb') = n.$$

   Dès lors, on peut écrire

$$ax+by=n \Leftrightarrow a(x-na^{-1}) = -b(nb'+y).$$

   Puisque $b|a(x-na^{-1})$ et $a \wedge b = 1$, il vient $b|x-na^{-1}$. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = kb + na^{-1}$. En revenant à $a(x-na^{-1}) = -b(nb'+y)$, on obtient $kab = -b(nb'+y)$ ce qui donne $y = -nb' - ka$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E_n) est l'ensemble $\left\{(a^{-1}n+kb, -b'n-ka),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. a) On veut
$$\begin{cases} 0 \leqslant a^{-1}n + kb \\ 0 \leqslant -b'n - ka \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{a^{-1}n}{b} \leqslant k \leqslant -\frac{b'n}{a} \Leftrightarrow \frac{b'n}{a} \leqslant -k \leqslant \frac{a^{-1}n}{b}.$$
Puisque $\frac{a^{-1}n}{b}$ et $\frac{b'n}{a}$ ne sont pas entiers, ceci est équivalent à
$$\left\lfloor \frac{b'n}{a} \right\rfloor + 1 \leqslant -k \leqslant \left\lfloor \frac{a^{-1}n}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b'n}{a} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{a^{-1}n}{b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b'n}{a} \right\rfloor \right).$$
Le nombre de valeurs que peut prendre l'entier $-k$ est donc $\left\lfloor \frac{a^{-1}n}{b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b'n}{a} \right\rfloor$, ie on a
$$s_n = \left\lfloor \frac{a^{-1}n}{b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b'n}{a} \right\rfloor.$$

b) En revenant à la définition de la partie fractionnaire d'un réel, on a
$$\begin{aligned} s_n &= \frac{a^{-1}n}{b} - \frac{b'n}{a} - \left\{ \frac{a^{-1}n}{b} \right\} + \left\{ \frac{b'n}{a} \right\} = \frac{(aa^{-1} - bb')n}{ab} - \left\{ \frac{a^{-1}n}{b} \right\} + \left\{ \frac{(a - b^{-1})n}{a} \right\} \\ &= \frac{n}{ab} - \left\{ \frac{a^{-1}n}{b} \right\} + \left\{ n - \frac{b^{-1}n}{a} \right\} \quad \text{(question 2}b\text{)}. \end{aligned}$$
Enfin, puisque $\frac{b^{-1}n}{a}$ n'est pas entier, on a $\left\{ n - \frac{b^{-1}n}{a} \right\} + \left\{ \frac{b^{-1}n}{a} \right\} = 1$. Par conséquent, il vient
$$s_n = \frac{n}{ab} - \left\{ \frac{a^{-1}n}{b} \right\} - \left\{ \frac{b^{-1}n}{a} \right\} + 1.$$

c) Pour $a = 12$, $b = 7$ et $n = 100$, on a déjà vu dans la partie 1 qu'il n'y avait qu'une seule solution dans $\mathbb{N}^2$, ie $s_{100} = 1$. On se propose de vérifier ce résultat avec l'expression de s_{100} obtenue dans la question 3a (l'expression de s_n de la question 3b précise surtout le comportement de s_n en fonction de n, a et n puisque les parties fractionnaires sont des réels de $[0, 1[$).
Dans cette même partie 1, on a vu $a^{-1} = 3$, $b^{-1} \equiv -5[12]$ donc $b^{-1} = 7$ puis $b' = a - b^{-1} = 5$. Il vient
$$s_{100} = \left\lfloor \frac{300}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{12} \right\rfloor = 42 - 41 = 1.$$

Problème 2 :

Partie 1

1. En utilisant la formule d'Euler exprimant le cosinus d'un nombre réel, pour tous réels x et y, il vient
$$\begin{aligned} 2\cos(x)\cos(y) &= \frac{(e^{ix} + e^{-ix})(e^{ix} + e^{-ix})}{2} = \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}}{2} \\ &= \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{2} + \frac{e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}}{2} = \cos(x+y) + \cos(x-y). \end{aligned}$$
En utilisant la définition de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$, il vient
$$\begin{aligned} 2\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) &= \frac{(e^{x} + e^{-x})(e^{x} + e^{-x})}{2} = \frac{e^{(x+y)} + e^{-(x+y)} + e^{(x-y)} + e^{-(x-y)}}{2} \\ &= \frac{e^{(x+y)} + e^{-(x+y)}}{2} + \frac{e^{(x-y)} + e^{-(x-y)}}{2} = \mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y). \end{aligned}$$
Par conséquent, les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ appartiennent à $\mathcal{E}$.

2. Soient $f \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tous réel x et y, on a

$$\begin{aligned} f_\alpha(x+y)+f_\alpha(x-y) &= f(\alpha(x+y))+f(\alpha(x-y)) = f(\alpha x+\alpha y)+f(\alpha x-\alpha y)\\ &= 2f(\alpha x)f(\alpha y) \text{ car } f \in \mathcal{E}\\ &= 2f_\alpha(x)f_\alpha(y). \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction f_α appartient à $\mathcal{E}$.

3. a) On choisissant $x = y = 0$, la relation fonctionnelle définissant $\mathcal{E}$ donne

$$2f(0) = 2f(0)^2 \Leftrightarrow f(0)[f(0)-1] = 0.$$

Par conséquent, soit $f(0) = 0$, soit $f(0) = 1$.

b) Si $f(0) = 0$, en choisissant $x \in \mathbb{R}$ quelconque et $y = 0$, la relation fonctionnelle définissant $\mathcal{E}$ donne

$$2f(x) = 2f(x)f(0) = 2f(x)\times 0 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Ainsi, pour tout réel x, on a $f(x) = 0$. Autrement dit, la fonction f est identiquement nulle.

c) Si $f(x) = 1$, en choisissant $x = 0$ et $y \in \mathbb{R}$ quelconque, la relation fonctionnelle définissant $\mathcal{E}$ donne

$$f(y)+f(-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y) \Leftrightarrow f(-y) = f(y).$$

Ainsi, pour tout réel y, on a $f(-y) = f(y)$. Autrement dit, la fonction f est paire.

Partie 2

1. La fonction f étant deux fois dérivable, pour tout réel x, les fonctions $y \mapsto f(x+y)+f(x-y)$ et $y \mapsto 2f(x)f(y)$ sont deux fois dérivables (par rapport à y). On peut donc dériver deux fois par rapport à y l'équation fonctionnelle définissant $\mathcal{E}$. Il s'ensuit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f''(x+y)+f''(x-y) = 2f(x)f''(y).$$

En prenant $y = 0$ dans l'équation différentielle précédente valable pour tout réel y, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f''(x) = 2f(x)f''(0).$$

En posant $\lambda = f''(0)$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \lambda f(x) \qquad \text{avec} \qquad \lambda = f''(0).$$

2. Une fonction f deux fois dérivable dans $\mathcal{E}$ vérifie donc l'équation différentielle linéaire du second ordre et sans second membre

$$y'' - \lambda y = 0.$$

L'équation caractéristique $r^2 - \lambda = 0$ possède deux, une ou aucune solution suivant la valeurs de λ.

- Si $\lambda > 0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $\sqrt{\lambda}$ et $-\sqrt{\lambda}$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation différentielle $y'' - \lambda y = 0$ sont les fonctions de la formes

$$x \mapsto \mu_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + \mu_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \text{avec} \quad (\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si $\lambda = 0$ alors l'équation caractéristique possède une unique racine réelle 0. Il s'ensuit que les solutions de l'équation différentielle $y'' - \lambda y = 0$ sont les fonctions de la formes

$$x \mapsto \mu_1 x + \mu_2 \quad \text{avec} \quad (\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si $\lambda < 0$ alors l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées distinctes $i\sqrt{|\lambda|}$ et $-i\sqrt{|\lambda|}$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation différentielle $y'' - \lambda y = 0$ sont les fonctions de la formes

$$x \mapsto \mu_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}x) + \mu_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}x) \quad \text{avec} \quad (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2.$$

3. La fonction nulle est bien deux fois dérivable et appartient à $\mathcal{E}$. Cherchons maintenant les fonctions de $\mathcal{E}$ deux fois dérivables et non nulles. D'après les questions $3a$ et $3c$ de la partie 1, une telle fonction f est paire et vérifie $f(0) = 1$.

   Par ailleurs, en utilisant la résolution de l'équation différentielle précédente, on obtient :

   - Si $f''(0) = \lambda > 0$ alors $\exists(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = \mu_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + \mu_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.
     La condition f paire implique, en dérivant puis en évaluant en $x = 0$, $\mu_1 = \mu_2$.
     La condition $f(0) = 1$ implique alors $\mu_1 = \mu_2 = 1/2$.
     Par conséquent,
     $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{\lambda}x} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\lambda}x} = \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$
     Ainsi, f est de la forme $x \mapsto \operatorname{ch}(\alpha x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
     Il reste à vérifier que de telles fonctions appartiennent bien à $\mathcal{E}$. On a
     $$(\operatorname{ch}(\alpha x))'' = \alpha^2 \operatorname{ch}(\alpha x) \text{ donc } (\operatorname{ch}(\alpha x))''(0) = \alpha^2 > 0.$$
     Par ailleurs, grâce aux questions 1 et 2 de la partie 1, les fonctions de la forme $x \mapsto \operatorname{ch}(\alpha x)$ appartiennent bien à $\mathcal{E}$.
   - Si $f''(0) = 0$ alors $\exists(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = \mu_1 x + \mu_2$.
     La condition f paire implique $\mu_1 = 0$.
     La condition $f(0) = 1$ implique alors $\mu_2 = 1$.
     Par conséquent, la fonction f est la fonction constante égale à 1. Celle-ci vérifie bien $f''(0) = 0$ et appartient bien à $\mathcal{E}$ (la vérification est immédiate mais on peut aussi remarquer que pour tout réel x, on a $1 = \operatorname{ch}(0 \times x)$ et utiliser les questions 1 et 2 de la partie 1).
   - Si $f''(0) = \lambda > 0$ alors $\exists(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = \mu_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}x) + \mu_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}x)$.
     La condition f paire implique, en dérivant puis en évaluant en $x = 0$, $\mu_2 = 0$.
     La condition $f(0) = 1$ implique alors $\mu_1 = 1/2$.
     Par conséquent,
     $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(\sqrt{|\lambda|}x).$$
     Ainsi, f est de la forme $x \mapsto \cos(\alpha x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
     Il reste à vérifier que de telles fonctions appartiennent bien à $\mathcal{E}$. On a
     $$(\cos(\alpha x))'' = -\alpha^2 \cos(\alpha x) \text{ donc } (\cos(\alpha x))''(0) = -\alpha^2 < 0.$$
     Par ailleurs, grâce aux questions 1 et 2 de la partie 1, les fonctions de la forme $x \mapsto \cos(\alpha x)$ appartiennent bien à $\mathcal{E}$.

   En résumé, les fonctions deux fois dérivables et non nulles appartenant à $\mathcal{E}$ sont les fonctions de la forme
   $$x \mapsto \operatorname{ch}(\alpha x) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{ou} \qquad x \mapsto \cos(\alpha x) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Partie 3

1. Par hypothèse, la fonction f n'est pas la fonction nulle. En utilisant le résultat de la question $3b$ de la partie 1, il s'ensuit que $f(0) \neq 0$. Grâce à la question $1.3a$, il vient $f(0) = 1$.

   La fonction f est supposée s'annuler au moins une fois sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Par ailleurs, on a montré que $f(0) = 1$ donc $x_0 \neq 0$ et, grâce à la question $1.3c$, la fonction f est paire. Il s'ensuit que $f(x_0) = 0 = f(-x_0)$. Comme l'un des deux réels x_0 ou $-x_0$ est positif, la fonction f s'annule sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. a) On vient de montrer que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $E \neq \emptyset$. Par ailleurs, l'ensemble E est minoré par 0. En tant que partie non vide et minorée, l'ensemble E admet une borne inférieure.

   b) Par définition des bornes inférieures, pour tout entier $n \geqslant 1$,

   $$\exists x_n \in E, \quad a \leqslant x_n < a + \frac{1}{n}.$$

   En utilisant le théorème des gendarmes, on obtient que la suite (x_n) converge et

   $$\lim_{n \to +\infty} x_n = a.$$

   La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, on obtient

   $$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a).$$

   Par ailleurs, pour tout entier $n \geqslant 1$, le réel x_n appartient à E, ie

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(x_n) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 0.$$

   Par unicité de la limite, on obtient $f(a) = 0$. Comme $f(0) = 1 \neq 0$, on déduit que $a \neq 0$.

   c) Par l'absurde, supposons qu'il existe $b \in [0, a[$ tel que $f(b) \leqslant 0$. Comme $f(0) = 1 > 0$, la fonction f étant continue, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, b]$ tel que $f(c) = 0$. Autrement dit, $c \in E$. Par construction, on a $a = \inf E$ donc $a \leqslant c$. Cependant, on a également $c \leqslant b < a$ ce qui est absurde, on ne peut avoir à la fois $a \leqslant c$ et $c < a$. Par conséquent,

   $$\forall x \in [0, a[, \quad f(x) > 0.$$

3. a) La fonction f appartient à $\mathcal{E}$. On prenant $x = y = \frac{a}{2^{q+1}}$ dans l'équation fonctionnelle définissant $\mathcal{E}$, on obtient

   $$f\left(\frac{a}{2^{q+1}} + \frac{a}{2^{q+1}}\right) + f\left(\frac{a}{2^{q+1}} - \frac{a}{2^{q+1}}\right) = 2f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{a}{2^q}\right) + f(0) = 2f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)^2.$$

   On a montré lors de la question 3.1 que $f(0) = 1$. Par conséquent,

   $$\forall q \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)^2.$$

   b) Avant de répondre à la question demandée, on commence par exprimer la formule de duplication vérifiée par la fonction g dont on aura besoin. On a

   $$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(2x) = \cos(2(\omega x)) = 2\cos^2(\omega x) - 1 = 2g^2(x) - 1. \\ \Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(g(x) + 1\right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $x \in [0,a]$, on a $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}\right) \geqslant 0$. Par conséquent,

$$\forall x \in [0,a], \quad g\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(g(x)+1\right)} \tag{1}$$

Montrons par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ la relation $f(\frac{a}{2^q}) = g(\frac{a}{2^q})$.
Pour $q = 0$, on a $f(\frac{a}{2^0}) = f(a) = 0$ d'après la question 3.2*b*. Par ailleurs, $g(\frac{a}{2^0}) = g(a) = \cos(\omega a) = \cos(\pi/2) = 0$. Ainsi, on a bien $f(\frac{a}{2^0}) = g(\frac{a}{2^0})$.
Supposons la relation $f(\frac{a}{2^q}) = g(\frac{a}{2^q})$ établie pour un certain entier q fixé. On a $\frac{a}{2^{q+1}} \in [0,a[$ et f est strictement positive sur $[0,a[$ d'après la question 3.2*c*. On peut ainsi légitiment composer par la fonction racine carrée dans la relation obtenue en 3.3*a*. Il s'ensuit

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+f\left(\frac{a}{2^q}\right)\right)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+g\left(\frac{a}{2^q}\right)\right)} \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= g\left(\frac{1}{2}\frac{a}{2^q}\right) \text{ grâce à la relation (1)} \\
&= g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence et prouve la relation annoncée.

c) Soit $q \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons par récurrence double sur $p \in \mathbb{N}$ que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{ap}{2^q}\right) = g\left(\frac{ap}{2^q}\right).$$

Pour $p = 0$, il nous faut vérifier que $f(0) = g(0)$ ce qui est vrai puisque $f(0) = 1 = g(0)$ (question 3.2*b*).
Pour $p = 1$, on a bien $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$ d'après la question précédente.
Supposons que pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, on ait

$$f\left(\frac{ap}{2^q}\right) = g\left(\frac{ap}{2^q}\right) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{a(p+1)}{2^q}\right) = g\left(\frac{a(p+1)}{2^q}\right).$$

Grâce à l'équation fonctionnelle définissant $\mathcal{E}$, on a pour tout entier $q \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a(p+1)}{2^q}+\frac{a}{2^q}\right) + f\left(\frac{a(p+1)}{2^q}-\frac{a}{2^q}\right) = 2f\left(\frac{a(p+1)}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right) \\
\Leftrightarrow & f\left(\frac{a(p+2)}{2^q}\right) = -f\left(\frac{ap}{2^q}\right) + 2f\left(\frac{a(p+1)}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence et la formule pour $p = 1$, on obtient

$$f\left(\frac{a(p+2)}{2^q}\right) = -g\left(\frac{ap}{2^q}\right) + 2g\left(\frac{a(p+1)}{2^q}\right)g\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a(p+2)}{2^q}\right)$$

car g appartient à $\mathcal{E}$ d'après les questions 1.1 et 1.2*a*. Ceci achève la récurrence. Les fonctions f et g étant paires (question 1.3*c*), cette relation s'étend à tout entier relatif p.

4. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $p_n = \left\lfloor \dfrac{2^n x}{a} \right\rfloor$. Par construction de la partie entière, on a
$$p_n \leqslant \frac{2^n x}{a} < p_n + 1 \Leftrightarrow x - \frac{a}{2^n} < \frac{p_n a}{2^n} \leqslant x.$$
Par construction, pour tout entier n, le réel $\frac{p_n a}{2^n}$ appartient à D_a et grâce au théorème des gendarmes, on obtient
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p_n a}{2^n} = x.$$
Nous avons construit une suite d'éléments de D_a tendant vers x.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(x) = g(x)$. On a montré dans la question précédente 3.4a
$$\exists (x_n) \in D_a^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$
Les fonctions f et g étant continues, on obtient
$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} g(x_n) = g(x).$$
Par ailleurs, on a montré lors de la question 3.3c, que
$$\forall y \in D_a, \quad f(y) = g(y) \quad \text{donc} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) = g(x_n).$$
Par conséquent,
$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} g(x_n) = g(x).$$
La fonction f correspond à la fonction g, ie $f = g$.

Partie 4

On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui vérifie l'équation fonctionnelle étudiée et qui n'est pas la fonction nulle. On note F l'unique primitive de f qui s'annule en 0.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a $F(y) = \int_0^y f(t)dt$ et, pour tous réels x et t, on a $f(x+t) + f(x-t) = 2f(x)f(t)$. En intégrant par rapport à la variable t, il vient
$$\int_0^y f(x+t) + f(x-t)dt = \int_0^y 2f(x)f(t)dt = 2f(x)\int_0^y f(t)dt = 2f(x)F(y).$$
Par ailleurs, en effectuant les changements de variables $u = x + t$ et $v = x - t$, on a aussi
$$\begin{aligned}\int_0^y f(x+t) + f(x-t)dt &= \int_0^y f(x+t)dt + \int_0^y f(x-t)dt = \int_x^{x+y} f(u)du - \int_x^{x-y} f(v)dv \\ &= \int_0^{x+y} f(u)du - \int_0^x f(u)du - \left(\int_0^{x-y} f(v)dv - \int_0^x f(v)dv\right) \\ &= F(x+y) - F(x) - F(x-y) + F(x) = F(x+y) - F(x-y).\end{aligned}$$
Par conséquent, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $F(x+y) - F(x-y) = 2f(x)F(y)$.

2. L'application F est non constante (car autrement $0 = F' = f$ ce qui est exclu) et vérifie $F(0) = 0$ donc il existe un réel x_0 tel que $F(x_0) \neq 0$. En posant $y = x_0$, on peut écrire
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{F(x+x_0) - F(x-x_0)}{2F(x_0)}.$$

La fonction F est dérivable donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée et combinaison linéaire de fonctions dérivables. De plus, on a

$$f'(x) = \frac{f(x+x_0) - f(x-x_0)}{2F(x_0)}.$$

De même, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée et combinaison linéaire de fonctions dérivables, ie f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction nulle vérifie l'équation fonctionnelle. Pour f non nulle continue vérifiant l'équation fonctionnelle, on vient de prouver que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On peut donc utiliser les résultats de la partie 2 et conclure qu'en plus de la fonction nulle, les fonctions de continues sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \operatorname{ch}(\alpha x) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{ou} \qquad x \mapsto \cos(\alpha x) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Partie 5

Tous les résultats de la partie 1 demeurent valables. En particulier, on a $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Le cas $f(0) = 0$ est exclu car f se retrouverait être constante égale à 0 (donc bornée). On en déduit $f(0) = 1$ et f paire. Il suffit donc de définir f sur $\mathbb{N}$.
On regarde la valeur de l'entier $f(1)$. On peut montrer :

- Si $|f(1)| \geqslant 2$ alors $|f(2^p)| \geqslant 2^{p+1}$ ce qui contredit f bornée.
- Si $f(1) = 1$ alors, en posant $m = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n+1)+f(n-1) = 2f(n)$ avec $f(0) = 1$ et $f(1) = 1$. On montre alors que $f(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui contredit f non constante.
- Si $f(1) = 0$ alors, en posant $m = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n+1) + f(n-1) = 2f(n)f(1) = 0$ donc $f(n+1) = -f(n-1)$. Sachant $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, on obtient

  $$f(2p+1) = 0 \quad \text{et} \quad f(2p) = (-1)^p.$$

  Ces expressions de f sont encore valables sur $\mathbb{Z}$.
- Si $f(1) = -1$ alors, en posant $m = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n+1) + 2f(n) + f(n-1) = 0$. On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$ et on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = (-1)^n$. Cette expression de f est encore valable sur $\mathbb{Z}$.

Par conséquent, il n'y a que deux fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ bornées et non constantes qui vérifient l'équation fonctionnelle. Il s'agit de

$$n \mapsto (-1)^n = \cos(n\pi) \quad \text{et} \quad n \mapsto \begin{cases} (-1)^p \text{ si } n = 2p \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n = 2p+1 \text{ est impair} \end{cases} = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$