MATHÉMATIQUES

Devoir n°3

Jeudi 24 Novembre 2022

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants dans l'appréciation des copies. **En particulier, il est indispensable de conclure vos réponses et d'encadrer vos résultats à la règle.**

On pourra admettre le résultat d'une question après l'avoir mentionné explicitement sur sa copie.

Questions de cours :

- Caractériser les diviseurs du PGCD de deux entiers a et b.
- Énoncer le lemme de Gauss.
- Énoncer le petit théorème de Fermat.

Exercice 1 On note f la fonction donnée par $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. a) Étudier la parité de f.
   b) Prouver que f est 2π-périodique.
   c) Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$ pour tracer sa courbe représentative sur $\mathbb{R}$. Justifier votre réponse.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ pour tout réel x.
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse π.
5. a) Étudier le signe de la dérivée f' sur $[0, \pi]$.
   b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
   c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On rappelle qu'une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} près est $1,732$.
6. On considère l'équation différentielle (E): $y'(x) + \frac{\sin x}{2-\cos x} y(x) = 2 \sin x$.
   a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène associée à (E).
   b) Résoudre complètement (E) sur $\mathbb{R}$.
   c) Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$.

Problème 1 :

Partie 1 Un exemple

1. Déterminer deux entiers u et v tels que $12u + 7v = 100$.
2. Déterminer tous les couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $12x + 7y = 100$.
3. Parmi toutes ces solutions, combien de couples d'entiers (x, y) avec x et y positifs y a-t-il ?

Partie 2 Théorème de Popoviciu

Dans toute la suite, on considère deux entiers naturels a et b premiers entre eux où on suppose $b < a$. Soit n un entier naturel n non nul. On note (E_n) l'équation diophantienne $ax + by = n$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{Z}$. On note s_n le nombre de couples de solutions de (E_n) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On note $\{\theta\}$ la partie fractionnaire d'un réel θ définie par $\{\theta\} = \theta - \lfloor \theta \rfloor$ de telle sorte que $\{\theta\} \in [0, 1[$ et $\theta = \lfloor \theta \rfloor + \{\theta\}$.

1. Justifier qu'il existe un unique élément de $\{1, ..., b-1\}$, noté a^{-1}, et un unique élément de $\{1, ..., a-1\}$, noté b^{-1} tels que
$$aa^{-1} \equiv 1[b] \quad \text{et} \quad bb^{-1} \equiv 1[a].$$
2. a) On note $b' = a - b^{-1}$. Montrer que $a^{-1}a - b'b \equiv 1[ab]$.
   b) En déduire $a^{-1}a - b'b = 1$.
   c) Montrer que l'ensemble des solutions de (E_n) est l'ensemble $\left\{(a^{-1}n + kb, -b'n - ka),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. On suppose que $\frac{a^{-1}n}{b}$ et $\frac{b'n}{a}$ ne sont pas entiers et vérifient $\frac{b'n}{a} < \frac{a^{-1}n}{b}$.
   a) Montrer que $s_n = \left\lfloor \frac{a^{-1}n}{b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b'n}{a} \right\rfloor$.
   b) En déduire la formule
   $$s_n = \frac{n}{ab} - \left\{ \frac{a^{-1}n}{b} \right\} - \left\{ \frac{b^{-1}n}{a} \right\} + 1.$$
   c) Dans le cas $a = 12$ et $b = 7$, déterminer la valeur de s_{100}.

Problème 2 : L'objectif de ce problème est d'étudier l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **continues** telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Partie 1 Premières propriétés

1. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ appartiennent à $\mathcal{E}$.
2. Soit f dans $\mathcal{E}$. Montrer que pour tout réel α, la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ est dans $\mathcal{E}$.
3. Soit f dans $\mathcal{E}$.
   a) Montrer que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
   b) Si $f(0) = 0$, montrer que f est la fonction identiquement nulle.
   c) Si $f(0) = 1$, montrer que f est une fonction paire.

Partie 2 Cas des fonctions deux fois dérivables

Dans cette partie, on se propose de déterminer les fonctions de $\mathcal{E}$ qui sont deux fois dérivables. On introduit une telle fonction f.

1. Montrer qu'il existe une constante réelle λ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \lambda f(x)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - \lambda y = 0$ en séparant les cas $\lambda < 0$, $\lambda > 0$ et $\lambda = 0$.
3. Déterminer les éléments de $\mathcal{E}$ qui sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie 3 Cas $f(0) = 1$

Dans cette partie, on oublie l'hypothèse de dérivabilité et on se propose de déterminer les fonctions de $\mathcal{E}$ qui s'annulent tout en n'étant pas identiquement nulle. On introduit une telle fonction f.

1. Montrer que $f(0) = 1$ et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. On note $E = \{x > 0, \quad f(x) = 0\}$.
   a) Montrer que E admet une borne inférieure que l'on note a.
   b) Prouver que $f(a) = 0$ et en déduire que $a > 0$.
   c) Montrer que, pour tout $x \in [0, a[$, on a $f(x) > 0$.

3. On pose $\omega = \frac{\pi}{2a}$ et on note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos(\omega x)$.

   a) Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2$.

   b) En déduire, en raisonnant par récurrence sur q que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.

   c) Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{pa}{2^q}\right) = g\left(\frac{pa}{2^q}\right)$. Étendre ce résultat à tout entier p dans $\mathbb{Z}$.

4. On note $D_a = \left\{\dfrac{pa}{2^q},\quad p \in \mathbb{Z},\quad q \in \mathbb{N}\right\}$.

   a) Montrer que tout réel est limite d'une suite d'éléments de D_a (pour tout réel x et tout entier n, on pourra utiliser l'entier $\left\lfloor \dfrac{2^n x}{a} \right\rfloor$).

   b) Montrer que $f = g$.

Partie 4 Sur l'hypothèse deux fois dérivable

On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui vérifie l'équation fonctionnelle étudiée et qui n'est pas la fonction nulle. On note F l'unique primitive de f qui s'annule en 0.

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $F(x + y) - F(x - y) = 2f(x)F(y)$.

2. En déduire que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer toutes les fonctions continues vérifiant l'équation fonctionnelle.

Partie 5 Sur les entiers ?

Donner deux exemples de fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ non constantes et bornées telles que, pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $\quad f(n + m) + f(n - m) = 2f(n)f(m)$ puis les déterminer toutes.