MATHÉMATIQUES
Devoir n°2
Correction

Exercice 1 1. Voir cours.

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leqslant y$. On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$ donc $\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$ dont on ne garde que
$$\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1.$$
Comme $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor$ sont des entiers, on obtient $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$. La fonction partie entière est ainsi croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 On pose $\varphi(z) = |z^3 - z + 2|$ pour $z \in \mathbb{C}$. On souhaite déterminer la valeur maximale de $\varphi(z)$ lorsque z décrit $\mathbb{U}$.

1. On a
$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \operatorname{Re}\left[e^{3i\theta}\right] = \operatorname{Re}\left[\left(e^{i\theta}\right)^3\right] = \operatorname{Re}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^3\right] \\ &= \operatorname{Re}\left[(\cos\theta)^3 + 3(\cos\theta)^2(i\sin\theta) + 3(\cos\theta)(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3\right] \\ &= (\cos\theta)^3 - 3\cos(\theta)(\sin\theta)^2 = (\cos\theta)^3 - 3\cos(\theta)(1-\cos^2\theta) \\ &= 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta.\end{aligned}$$

2. Soit $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. On peut réécrire
$$\begin{aligned}|z^3 - z + 2|^2 &= (z^3 - z + 2)(\overline{z^3 - z + 2}) = (z^3 - z + 2)(\bar{z}^3 - \bar{z} + 2) \\ &= |z|^6 - z^3\bar{z} + 2z^3 - z\bar{z}^3 + |z|^2 - 2z + 2\bar{z}^3 - 2\bar{z} + 4 \\ &= 6 + 2(z^3 + \bar{z}^3) - (z^2 + \bar{z}^2) - 2(z + \bar{z}) \\ &= 6 + 2\left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}\right) - \left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right) - 2\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \\ &= 6 + 4\cos(3\theta) - 2\cos(2\theta) - 4\cos(\theta) \\ &= 6 + 4(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - 2(2\cos^2\theta - 1) - 4\cos\theta \\ &= 8 - 16(\cos\theta) - 4(\cos\theta)^2 + 16(\cos\theta)^3.\end{aligned}$$

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et, pour tout réel x, on a
$$f'(x) = 12x^2 - 2x - 4 = 12\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$
De plus, on calcule $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{27}$ ainsi que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(4 - \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = +\infty \text{ et de même } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$
On en déduit le tableau de variation de f'.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. On remarque que pour $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$, les questions précédentes permettent de réécrire

$$\varphi(z)^2 = \varphi\left(e^{i\theta}\right)^2 = 4f(\cos\theta).$$

Comme $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, on obtient

$$\max_{z\in\mathbb{U}} \varphi(z) = \max_{x\in[-1,1]} 2\sqrt{f(x)}.$$

Le tableau de variation précédent se réduit sur $[-1, 1]$ sous la forme

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
f	1	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{17}$	$\nearrow$	1
$2\sqrt{f}$	1	$\nearrow$	$\sqrt{13}$	$\searrow$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$	$\nearrow$	1

Par conséquent, on obtient $\max_{z\in\mathbb{U}} \varphi(z) = \max_{x\in[-1,1]} 2\sqrt{f(x)} = \sqrt{13}$ et ce maximum est atteint pour $z = e^{i\theta}$ vérifiant $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ ie pour $z = e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}$.

Problème :

Partie 1 Ensembles équipotents

1. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\varphi_1(n) = m$ admet une unique solution $n = m-1 \in \mathbb{N}$. Par conséquent, la fonction φ_1 est bijective et $\varphi_1^{-1} : \begin{cases} \mathbb{N}^* \to \mathbb{N} \\ m \mapsto m-1 \end{cases}$.

2. a) Par récurrence forte.
   • Pour $n = 1$, on peut écrire $n = 1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$ donc, avec $m = p = 0$, on a bien la décomposition voulue.
   • On suppose vraie notre propriété pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, ie tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ se décompose comme le produit d'une puissance de 2 et d'un impair. On considère l'entier $n+1$.
   - 1[er] cas : Si $n + 1$ est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 = 2p + 1 = 2^0(2p + 1)$ qui est une décomposition voulue.

- $2^{\text{ième}}$ cas : Si $n+1$ est pair, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+1 = 2k_0$. On a $k_0 = \frac{n+1}{2} \in [\![1, n]\!]$ donc il existe $(m, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k_0 = 2^m(2p+1)$ ce qui donne $n = 2k_0 = 2^{m+1}(2p+1)$.

Dans les deux cas, on a réussi à écrire $n+1$ sous la forme du produit d'une puissance de 2 et d'un impair ce qui achève la récurrence.

b) Soient $(m, p) \in \mathbb{N}^2$ et $(m', p') \in \mathbb{N}^2$ tels que $\varphi_2(m, p) = \varphi_2(m', p')$. Si $m = \max\{m, m'\}$, on a $2^{m-m'}(2p+1) = 2p'+1$ qui est impair donc non divisible par 2 ce qui donne $m - m' = 0$, ie $m = m'$. Ce raisonnement est identique si $\max\{m, m'\} = m'$. Il reste alors $2p+1 = 2p'+1$ qui donne $p = p'$. Par conséquent, la condition $\varphi_2(m, p) = \varphi_2(m', p')$ implique $(m, p) = (m', p')$: la fonction φ_2 est injective.

3. Les questions 2a et 2b prouvent que φ_2 est surjective et injective donc bijective. On a $\mathbb{N}^2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{N}^* \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} \mathbb{N}$ donc $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est bijective en tant que composée de deux bijections. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est équipotent à $\mathbb{N}$.

4. a) Soit $n \in \mathbb{Z}$.
   - Si $n \geqslant 0$, on a $2n \in \mathbb{N}$ et $2n$ pair donc $\varphi_3(2n) = \frac{2n}{2} = n$.
   - Si $n < 0$, on a $-1-2n \in \mathbb{N}$ et $-1-2n$ impair donc $\varphi_3(-1-2n) = -\frac{-1-2n+1}{2} = n$.

   Dans tous les cas, on a écrit $n = \varphi_3(\text{qqch dans } \mathbb{N})$: la fonction φ_3 est surjective.

   b) Soit $(n, n') \in \mathbb{N}^2$ tel que $\varphi_3(n) = \varphi_3(n')$.
   - Si n et n' sont pairs alors : $\varphi_3(n) = \varphi_3(n') \Rightarrow \frac{n}{2} = \frac{n'}{2} \Rightarrow n = n'$.
   - Si n et n' sont impairs alors : $\varphi_3(n) = \varphi_3(n') \Rightarrow -\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2} \Rightarrow n = n'$.
   - Si n et n' n'ont pas la même parité, par exemple n pair et n' impair. Dans ce cas :

   $$\varphi_3(n) = \varphi_3(n') \Rightarrow \frac{n}{2} = -\frac{n'+1}{2} \Rightarrow -n = n'+1 \in \mathbb{N}^*$$

   donc $n < 0$ ce qui est absurde. Ce dernier cas n'a pas lieu d'être.

   On a toujours $[\varphi_3(n) = \varphi_3(n') \Rightarrow n = n']$: la fonction φ_3 est injective.

5. Les trois premières questions à venir prouvent que la relation $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive mais sur quel ensemble ? Celui de tous les ensembles qui n'en est pas un ? Sur la classe de tous les ensembles ? Sur une famille d'ensembles particuliers qui serait un ensemble ? Le programme ne nous permet pas d'apporter une réponse précise sur ce point et nous ne parlerons donc pas de relation d'équivalence pour la relation $\sim$.

   a) La fonction $\mathrm{id}_E : E \to E$ est bijective donc $E \sim E$.

   b) Si $E \sim F$, il existe $f : E \to F$ bijective. La fonction réciproque $f^{-1} : F \to E$ étant aussi bijective, on a également $F \sim E$.

   c) Si $E \sim F$ et $F \sim G$ alors il existe $f : E \to F$ et $g : F \to G$ bijectives. En tant que composée de deux bijections, $g \circ f : E \to G$ est bijective donc $E \sim G$.

   d) Si $E \sim G$ et $F \sim H$ alors il existe $f : E \to G$ et $g : F \to H$ bijectives. On pose $\psi : E \times F \to G \times H$ définie par

   $$\psi(x_E, x_G) = (\underbrace{f(x_E)}_{\in G}, \underbrace{g(x_F)}_{\in H}) \in G \times H.$$

   - Soit $(y_G, y_H) \in G \times H$. Les fonctions f et g sont surjectives donc il existe $x_E \in E$ et $x_F \in F$ tels que $f(x_E) = y_G$ et $g(x_F) = y_H$, ie

   $$(y_G, y_H) = (f(x_E), g(x_F)) = \psi(x_E, x_F).$$

   La fonction ψ est surjective.

- Soient $(x_E, x_F) \in E \times F$ et $(x'_E, x'_F) \in E \times F$ tels que $\psi(x_E, x_F) = \psi(x'_E, x'_F)$. Les fonctions f et g étant injectives, on a alors

$$\psi(x_E, x_F) = \psi(x'_E, x'_F) \Leftrightarrow (f(x_E), g(x_F)) = (f(x'_E), g(x'_F)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_E) = f(x'_E) \\ g(x_F) = g(x_F) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = x'_E \\ x_F = x'_F \end{cases} \Leftrightarrow (x_E, x_F) = (x'_E, x'_F).$$

La fonction ψ est injective.

La fonction ψ est ainsi bijective donc $E \times F \sim G \times H$.

6. a) La fonction $i : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2 \\ n \mapsto (n, 0) \end{cases}$ ne prenant que des valeurs distinctes, elle est injective.

b) Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $(p', q') \in \mathbb{N}^2$ tels que $f(p, q) = f(p', q')$. On a considère le plus grand élément entre p et p', par exemple si $p = \max\{p, p'\}$, on a

$$2^p 3^q = 2^{p'} 3^{q'} \Rightarrow 2^{p-p'} 3^q = 3^{q'}$$

qui est impair donc non divisible par 2. On en tire $p - p' = 0$ donc $p = p'$. Il reste $3^q = 3^{q'}$ donc $q = q'$. On a bien établi $(p, q) = (p', q')$ donc f est injective.
Remarque : la fonction f est immédiatement injective par unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de facteurs premiers.

c) Les fonctions $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ et $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sont injectives donc, grâce au théorème de Cantor-Bernstein, il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$. On retrouve le fait que les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents.
L'entier 5 n'appartient pas à de $f(\mathbb{N}^2)$ donc f n'est pas surjective.

7. $\diamond$ La fonction $\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \\ n \mapsto n \end{cases}$ est injective.

$\diamond$ On va construire une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$. On a $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ (question 4) et $\mathbb{N}^* \sim \mathbb{N}$ (question 1) donc $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \sim \mathbb{N}^2$ (question 5d). De plus, sachant $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$ (questions 3 ou 6c), il vient $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \sim \mathbb{N}$ par transitivité. Ainsi, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$. Par ailleurs, tout rationnel s'écrivant de manière unique sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux, la fonction $\tilde{\varphi} : \begin{cases} \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ x = \frac{p}{q} \mapsto (p, q) \end{cases}$ est injective. En tant que composée de deux injections, la fonction $\varphi \circ \tilde{\varphi} : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ est injective.

$\diamond$ Grâce au théorème de Cantor-Bernstein, les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont équipotents.

Partie 2 Suites de Brocot

1. $\diamond$ Soient $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{p'}{q'}$ deux rationnels écrits sous forme irréductible.
Méthode 1 : On a

$$x \oplus y - x = \frac{p+p'}{q+q'} - \frac{p}{q} = \frac{q(p+p') - p(q+q')}{q(q+q')} = \frac{qp' - pq'}{q(q+q')} = \frac{q'}{q+q'}(y-x) > 0$$
$$\text{et } x \oplus y - y = \frac{p+p'}{q+q'} - \frac{p'}{q'} = \frac{q'(p+p') - p'(q+q')}{q'(q+q')} = \frac{q'p - p'q}{q'(q+q')} = \frac{q}{q+q'}(x-y) < 0.$$

Ainsi $x < x \oplus y < y$.
Méthode 2 : On a

$$x \oplus y = \frac{p+p'}{q+q'} = \frac{qx+q'y}{q+q'} = \frac{q}{q+q'}x + \left(1 - \frac{q}{q+q'}\right)y$$

qui est de la forme $tx + (1-t)y$ avec $t \in]0,1[$. La fonction affine $t :\mapsto tx + (1-t)y$ réalise une bijection entre $]0,1[$ et $]x,y[$ donc $x \oplus y \in]x,y[$.
$\diamond$ Si $\frac{p}{q}$ est un représentant irréductible d'un rationnel x et $y = \infty$, alors $x \oplus y = \frac{p+1}{q}$ est fini et on a $\frac{p}{q} < \frac{p+1}{q}$ donc $x < x \oplus y < y$.

2. Soient $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{p'}{q'}$ deux rationnels finis écrits sous forme irréductible.
   $\diamond$ On a $x = y \Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' = p'q \Leftrightarrow d(x,y) = 0$.
   $\diamond$ $x < y \Leftrightarrow \frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} < 0 \Leftrightarrow \underbrace{pq' - p'q}_{\in\mathbb{Z}} < 0 \Leftrightarrow \underbrace{d(x,y) = pq' - p'q}_{\in\mathbb{Z}} \leqslant -1$.
   On peut vérifier que ces résultats demeurent valables si $y = \infty$.

3. Soient $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{p'}{q'}$ deux rationnels finis écrits sous forme irréductible. On suppose $-1 = d(x,y) = pq' - p'q$. On a alors

$$p(q+q') - (p+p')q = pq' - p'q = -1 \text{ ie } (p+p')\underbrace{q}_{=u} + \underbrace{(-p)}_{=v}(q+q') = 1.$$

   Grâce au théorème de Bézout, les entiers $p+p'$ et $q+q'$ sont premiers entre eux. L'écriture $\frac{p+p'}{q+q'}$ est un représentant irréductible de $x \oplus y$ ce qui donne

$$d(x, x\oplus y) = p(q+q') - (p+p')q = -1 \text{ et } d(x\oplus y, y) = (p+p')q' - p'(q+q') = pq' - p'q = -1.$$

   La notion de primalité n'est pas définie si $y = \infty$. Pour $y = \infty$, on a $d(x,y) = -1$ ssi $x \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on a $x \oplus y = \frac{x}{1} \oplus \frac{1}{0} = \frac{x+1}{1} = x+1 \in \mathbb{N}$ donc on a toujours $d(x, x\oplus y) = x \times 1 - (x+1) \times 1 = -1$ et $d(x \oplus y, y) = -1$.

4. a) On obtient :

$$B_3 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, \infty\right) \text{ et } B_4 = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4, \infty\right)$$

   b) On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ le résultat demandé sur toutes les suites B_k.
   $\diamond$ Pour $k = 0$, on a $B_0 = (0, \infty)$ et $d(0,\infty) = d\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right) = 0 \times 0 - 1 \times 1 = -1$.
   $\diamond$ On suppose que pour un certain $k \in \mathbb{N}$ fixé, le résultat soit vrai pour les termes consécutifs de la suite B_k. Par construction, deux termes consécutifs de B_{k+1} sont de la forme x, $x \oplus y$ ou $x \oplus y$, y avec x et y consécutifs dans B_k. Par hypothèse de récurrence, on a $d(x,y) = -1$. Grâce au résultat de la question 3, on a alors $d(x, x\oplus y) = d(x\oplus y, y) = -1$ ce qui achève la récurrence.

   c) Soient x, y et z trois rationnels positif. On considère des représentants irréductibles $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ et $\frac{p''}{q''}$ de respectivement x, y et z. On a $x \oplus y = \frac{p+p'}{q+q'}$ mais, n'ayant pas l'hypothèse $d(x,y) = pq' - p'q = -1$, on ne peut pas affirmer que cette représentation de $x \oplus y$ est irréductible. On introduit alors k le PGCD de $p+p'$ et $q+q'$ de telle sorte que l'on puisse écrire $p + p' = ka$, $q + q' = kb$ avec a et b premiers entre eux et que $x \oplus y$ s'écrive sous forme irréductible :

$$x \oplus y = \frac{p+p'}{q+q'} = \frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} d(x,z)=d(z,y) &\Leftrightarrow pq''-p''q=p''q'-p'q'' \Leftrightarrow (p+p')q''-p''(q+q')=0 \\ &\Leftrightarrow aq''-p''b=0 \Leftrightarrow d(x\oplus y,z)=0 \\ &\Leftrightarrow z=x\oplus y \quad \text{(résultat de la question 2).} \end{aligned}$$

d) Trois termes consécutifs d'une suite de Brocot sont de la forme x, $x\oplus y$, y ou $x\oplus y$, y, $y\oplus z$ avec x, y, z consécutifs dans la suite de Brocot précédente.
$\diamond$ Dans le cas x, $x\oplus y$, y : le terme $x\oplus y$ est par construction le médian de ses deux voisins.
$\diamond$ Dans le cas $x\oplus y$, y, $y\oplus z$: Les termes x, y et y et z étant consécutifs dans une suite de Brocot, on a $d(x,y)=-1=d(y,z)$ d'après la question 4b. On déduit alors de la question 3 que

$$d(x\oplus y,y)=-1=d(y,y\oplus z).$$

La question précédente permet de conclure que $y=(x\oplus y)\oplus(y\oplus z)$ est bien le médian de ses deux voisins.

5. a) On a $\frac{p}{q}<\frac{p''}{q''}$ donc $d(\frac{p}{q},\frac{p''}{q''})\leqslant -1$ et $\frac{p''}{q''}<\frac{p'}{q'}$ donc $d(\frac{p''}{q''},\frac{p'}{q'})\leqslant -1$ ce qui donne :

$$p''q-pq''\geqslant 1 \quad (1) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad p'q''-p''q'\geqslant 1 \quad (2)$$

En effectuant $q'\times(1)+q\times(2)$, il vient :

$$q+q'\leqslant q'(p''q-pq'')+q(p'q''-p''q')=q''(\underbrace{p'q-pq'}_{=1})=q''.$$

En effectuant $p'\times(1)+q\times(2)$, il vient :

$$p+p'\leqslant p'(p''q-pq'')+p(p'q''-p''q')=p''(\underbrace{p'q-pq'}_{=1})=p''.$$

b) Soit $\alpha\in\mathbb{R}^+$ un rationnel que l'on écrit sous forme irréductible $\frac{p''}{q''}$. On suppose que α n'appartient à aucune suite de Brocot. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $x_n=\frac{p_n}{q_n}$ et $y_n=\frac{p'_n}{q'_n}$ les termes consécutifs de la suite B_n qui encadrent α (écrits sous forme irréductible). L'inégalité $x_n<\alpha<y_n$ et le résultat de la question précédente donnent immédiatement

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad q''\geqslant q_n+q'_n \text{ et } p''\geqslant p_n+p'_n.$$

Les suites $(q_n+q'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(p_n+p'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se retrouvent être des suites qui sont majorées.
Cependant, partant de $x_n<\alpha<y_n$, par construction, on a $x_n<\alpha<x_n\oplus y_n=y_{n+1}$ ou $x_{n+1}=x_n\oplus y_n<\alpha<y_n$ ce qui donne

$$\begin{cases} p_{n+1}=p_n \\ q_{n+1}=q_n \\ p'_{n+1}=p_n+p'_n \\ q'_{n+1}=q_n+q'_n \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} p_{n+1}=p_n+p'_n \\ q_{n+1}=q_n+q'_n \\ p'_{n+1}=p'_n \\ q'_{n+1}=q'_n \end{cases}.$$

Dans les deux cas, on a

$$p_{n+1}+p'_{n+1}=p_n+p'_n+\begin{cases} p_n \\ p'_n \end{cases} > p_n+p'_n \text{ et } q_{n+1}+q'_{n+1}=q_n+q'_n+\begin{cases} q_n \\ q'_n \end{cases} > q_n+q'_n.$$

Les suites $(q_n + q'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(p_n + p'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se retrouvent être des suites d'entiers strictement croissantes qui sont majorées : c'est impossible. Par conséquent, le rationnel α appartient à une suite de Brocot (et donc à toutes les suivantes).
Remarque : Il suffisait de raisonner sur l'une des deux suites $(q_n + q'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(p_n + p'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour conclure.

Partie 3 Théorème de Cantor-Bernstein

1. Soit $x \in E\backslash C$.
   $\diamond$ Existence : Comme $x \notin C = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$, on a $x \notin C_0 = E\backslash g(F)$, ie $x \in g(F)$. Par conséquent, il existe $\alpha \in F$ tel que $x = g(\alpha)$.
   $\diamond$ Unicité : S'il existe $\alpha \in F$ et $\alpha' \in F$ tels que $x = g(\alpha)$ et $x = g(\alpha')$, par injectivité de g, on a $\alpha = \alpha'$.
   Par conséquent, x admet un et un seul antécédent par g dans F. Par construction, $\tilde{g}(x) \in F$ et vérifie $g(\tilde{g}(x)) = x$.

2. a) Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $h(x) = h(x')$.
      - Si $(x, x') \in C^2$ alors : $h(x) = h(x') \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ par injectivité de f.
      - Si $(x, x') \in (E\backslash C)^2$ alors, en composant par g, il vient
      $$h(x) = h(x') \Rightarrow \tilde{g}(x) = \tilde{g}(x') \Rightarrow x = g(\tilde{g}(x)) = g(\tilde{g}(x')) = x'.$$
      - Si $x \in C = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$ et $x' \in E\backslash C$ (ou l'inverse) alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in C_n$. Par ailleurs, la condition $h(x) = h(x')$ se réécrit $f(x) = \tilde{g}(x')$ ce qui, en composant par g donne
      $$x' = g(\tilde{g}(x')) = g \circ f(\underbrace{x}_{\in C_n}) \in g \circ f(C_n) = C_{n+1}.$$
      On vient de prouver $x' \in C_{n+1} \subset C$ ce qui contredit l'hypothèse $x' \in E\backslash C$. Ce dernier cas n'a pas lieu d'être.

   Dans tous les cas possibles, on aboutit à $x = x'$: la fonction h est injective.

   b) Soit $y \in F$.
   $\diamond 1^{er}$ cas : Si $y \in f(C)$ alors il existe $x \in C$ tel que $y = f(x)$ et, puisque $x \in C$, on a aussi $h(x) = f(x) = y$.
   $\diamond 2^{\text{ième}}$ cas : Si $y \notin f(C)$. On commence par prouver que $g(y) \notin C$. En effet, si $g(y) \in C = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(y) \in C_n$.
      - Si $n = 0$ alors $g(\underbrace{y}_{\in F}) \in C_0 = E\backslash g(F)$ ce qui est absurde.
      - Si $n > 0$ alors $g(y) \in C_n = g \circ f(C_{n-1})$ donc il existe $\alpha \in C_{n-1} \subset C$ tel que $g(y) = g \circ f(\alpha)$ ce qui, par injectivité de g, donne $y = f(\underbrace{\alpha}_{\in C}) \in f(C)$ et contredit $y \notin f(C)$.

   On en déduit que $g(y) \notin C$. Grâce au résultat de la première question, $g(y)$ admet un unique antécédent par g dans F. L'élément y étant lui-même un antécédent de $g(y)$ dans F, on a donc $y = \tilde{g}(g(y))$. Par conséquent, il vient
   $$h(\underbrace{g(y)}_{\notin C}) = \tilde{g}(g(y)) = y.$$
   Dans les deux cas, on a réussi à écrire $y = h(\text{qqch dans } E)$: la fonction que h est surjective.

La fonction h est ainsi une bijection de E sur F et les ensembles E et F se retrouvent être équipotents.