MATHÉMATIQUES

Devoir n°2

Jeudi 13 Octobre 2022

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants dans l'appréciation des copies. **En particulier, il est indispensable de conclure vos réponses et d'encadrer vos résultats à la règle.**

On pourra admettre le résultat d'une question après l'avoir mentionné explicitement sur sa copie.

Questions de cours :

- Donner la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée à une rotation de centre d'affixe ω et d'angle θ.
- Rappeler les lois de De Morgan (cas de deux ensembles).
- Soit $f : E \to F$. On considère une partie A de E et une partie B de F. Compléter les équivalences :
$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow \qquad \text{et} \qquad y \in f(A) \Leftrightarrow$$
- Soit $a \in \mathbb{R}^+$ fixé. Résoudre $|x| \leqslant a$ et $|x| \geqslant a$.

Exercice 1

1. Rappeler la définition de la partie entière d'un réel x.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 On pose $\varphi(z) = |z^3 - z + 2|$ pour $z \in \mathbb{C}$. On souhaite déterminer la valeur maximale de $\varphi(z)$ lorsque z décrit $\mathbb{U}$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$.
2. Soit $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. Montrer que
$$|z^3 - z + 2|^2 = 8 - 16\cos\theta - 4(\cos\theta)^2 + 16(\cos\theta)^3.$$
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2.$$
Établir le tableau de variation de f.
4. Déterminer la valeur maximale de $\varphi(z)$ lorsque z décrit $\mathbb{U}$. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de $z \in \mathbb{U}$ cette valeur maximale est atteinte.

Problème :

Partie 1 Ensembles équipotents

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est équipotent à F s'il existe une bijection de E sur F. On note alors $E \sim F$.

1. Montrer que $\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N}^* \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ est bijective. Quelle est sa fonction réciproque φ_1^{-1} ?

2. a) Par récurrence forte, montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe deux entiers naturels m et p tels que $n = 2^m(2p+1)$.

   b) On considère l'application $\varphi_2 : \begin{cases} \varphi_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^* \\ (m,p) \mapsto 2^m(2p+1) \end{cases}$. Montrer que φ_2 est injective.

3. En déduire que $\mathbb{N}^2$ est équipotent à $\mathbb{N}$.

4. On note $\varphi_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $\varphi_3(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

   a) Montrer que φ_3 est surjective.

   b) Montrer que φ_3 est injective.

5. a) Soit E un ensemble. Montrer que $E \sim E$.

   b) Soient E et F deux ensembles. Montrer que si $E \sim F$ alors $F \sim E$.

   c) Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que si $E \sim F$ et $F \sim G$ alors $E \sim G$.

   d) Soient E, F, G et H quatre ensembles. Montrer que si $E \sim G$ et $F \sim H$ alors $E \times F \sim G \times H$.

On admet le théorème de Cantor-Bernstein qui sera démontré en fin de problème.

Théorème 1 Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E alors il existe une bijection de E sur F.

6. a) Construire une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$.

   b) Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \\ (p,q) \mapsto 2^p 3^q \end{cases}$. Montrer que f est injective.

   c) Quel résultat déjà établi retrouve-t-on ? La fonction f est-elle surjective ?

7. Montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont équipotents.

Partie 2 Suites de Brocot

Le représentant irréductible d'un nombre rationnel positif x est une fraction $\frac{p}{q}$ telle que $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux. On convient que $\frac{0}{1}$ est le représentant irréductible de 0, $\frac{1}{1}$ est celui de 1 et par convention $\infty = \frac{1}{0}$.
Si les représentants irréductibles de deux nombres rationnels positifs (ou ∞) sont $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{p'}{q'}$, on définit le médian des nombres x et y par

$$x \oplus y = \frac{p+p'}{q+q'}.$$

De plus, on note $d(x,y) = pq' - p'q$.

1. Montrer que si x et y sont deux rationnels positifs tels que $x < y$ alors $x < x \oplus y < y$. Vérifier que cet encadrement demeure valable pour $y = \infty$.

2. Montrer que $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$ et $x < y \Leftrightarrow d(x,y) \leqslant -1$.

3. Montrer que si $x < y$ et $d(x,y) = -1$ alors les entiers $p + p'$ et $q + q'$ sont premiers entre eux et $d(x, x \oplus y) = -1 = d(x \oplus y, y)$.
   On pourra librement utiliser le résultat suivant : Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. S'il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$ alors les entiers a et b sont premiers entre eux.

Pour tout entier naturel n, on définit par récurrence une suite finie de nombres en posant :

$$\begin{array}{lllllll}
B_0 = & (0 = \frac{0}{1}, & & & & \frac{1}{0} = \infty) & = (0,\infty) \\
B_1 = & (0, & & \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{0} = 1, & & \infty) & = (0,1,\infty) \\
B_2 = & (0, & \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1} = \frac{1}{2}, & 1, & \frac{1}{1} \oplus \frac{1}{0} = 2, & \infty) & = (0,\frac{1}{2},1,2,\infty)
\end{array}$$

B_{n+1} s'obtient de B_n en y insérant tous les médians entre deux termes consécutifs.

4. a) Expliciter les suites finies B_3 et B_4.
   b) Montrer que si x et y sont deux termes consécutifs d'une suite de Brocot alors on a toujours $d(x,y) = -1$.
   c) Montrer que si x, y et z sont des rationnels positifs alors $d(x,z) = d(z,y)$ ssi $z = x \oplus y$.
   d) En déduire que tout terme non extrême d'une suite de Brocot est le médian de ses deux voisins.

5. a) Soient $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ et $\frac{p''}{q''}$ des représentants irréductibles de nombres rationnels positifs tels que $pq' - p'q = -1$. Montrer que si $\frac{p}{q} < \frac{p''}{q''} < \frac{p'}{q'}$ alors $q'' \geqslant q + q'$ et $p'' \geqslant p + p'$.
   b) En déduire que tous les rationnels positifs apparaissent à un moment dans une suite de Brocot.

Puisque tous les rationnels positifs apparaissent dans les suites de Brocot, en écrivant les rationnels par ordre d'apparition, on obtient une énumération de $\mathbb{Q}^+$ donc une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}^+$.

$$\underbrace{0}_{\in B_0}, \underbrace{1}_{\in B_1}, \underbrace{\frac{1}{2}, 2}_{\in B_2}, \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3}_{\in B_3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, 4, \cdots$$

Partie 3 Théorème de Cantor-Bernstein

Dans cette partie, on prouve le théorème de Cantor-Bernstein énoncé précédemment. On considère deux ensembles E et F ainsi que deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ injectives.

On définit par récurrence une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E en posant $C_0 = E\backslash g(F)$ et $C_{n+1} = g \circ f(C_n)$ pour tout entier naturel n. Enfin, on note $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

1. Justifier que tout $x \in E\backslash C$ admet un et un seul antécédent par g dans F. On note $\tilde{g}(x)$ cet antécédent. *On pourra utiliser l'ensemble C_0.*

2. On définit une application $h : E \to F$ par $h : x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in C \\ \tilde{g}(x) \text{ si } x \in E\backslash C \end{cases}$.

   a) Montrer que h est injective.

   b) Montrer que h est surjective. *On pourra commencer par traiter le cas $y \notin f(C)$ et montrer qu'alors $g(y) \notin C$.*

La fonction h ainsi construite est une bijection de E sur F.