MATHÉMATIQUES

Devoir n°1

Correction

Exercice 1 1. Soit $y \in [-1,1]$. On a $\cos^2(\arcsin y) + \sin^2(\arcsin y) = 1$ de quoi l'on tire

$$\cos^2(\arcsin y) = 1 - \sin^2(\arcsin y) = 1 - y^2.$$

Par ailleurs, on a $\arcsin y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on sait que $\cos\theta \geqslant 0$. Il s'ensuit

$$\cos(\arcsin y) = \sqrt{\cos^2(\arcsin y)} = \sqrt{1-y^2}.$$

2. Soit $\theta \in [0,\pi]$. En utilisant la relation $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, on a $\frac{\pi}{2} - \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc

$$\arcsin(\cos\theta) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

3. a) Soit $x \in [0,1]$. On a $\sqrt{x} \in [0,1]$ donc il existe $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sqrt{x} = \sin u$ ($u = \arcsin\sqrt{x}$ convient) d'où $x = \sin^2(u)$.

   b) En reprenant les notations de la question précédente, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\arcsin(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)\\
=&\arcsin(\sin u) - \frac{1}{2}\arcsin(2\sin^2(u) - 1)\\
=&\arcsin(\sin u) - \frac{1}{2}\arcsin(-\cos(2u)) \text{ en utilisant la relation } \cos(2u) = 1 - 2\sin^2(u),\\
=&u + \frac{1}{2}\arcsin(\cos(2u)) \text{ car } u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \arcsin \text{ impaire},\\
=&u + \frac{1}{2}\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2u\right)\right) \text{ en utilisant la relation de la question 2}\\
=&u + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2u\right) \text{ car } u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ donc } \frac{\pi}{2} - 2u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\\
=&\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

   Par conséquent, on a bien

$$\arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1).$$

Problème 1 :

Partie 1

1. En utilisant la définition de la fonction sh, on peut écrire

$$2\mathrm{sh}(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 1 = 0.$$

Or le polynôme X^2+X-1 a pour discriminant $1-4\times(-1)=5$ donc ce polynôme possède deux racines réelles qui sont $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. De plus on peut réécrire

$$X^2+X-1=\left(X-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Il s'ensuit

$$2\mathrm{sh}(x)+1=0 \Leftrightarrow \left(e^x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(e^x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ e^x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

On a $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$ et comme la fonction exponentielle est strictement positive, l'équation $e^x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ne possède pas de solution. Par conséquent, l'équation $2\mathrm{sh}(x)+1=0$ possède une unique solution α qui est

$$\alpha=\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

2. On a $2\mathrm{sh}(\alpha)+1=0$ donc $\mathrm{sh}(\alpha)=-\dfrac{1}{2}$. En utilisant la relation $\mathrm{ch}^2\alpha-\mathrm{sh}^2\alpha=1$, on obtient alors

$$f(\alpha)=(\mathrm{ch}\ \alpha)^2+\mathrm{sh}(\alpha)=1+(\mathrm{sh}\ \alpha)^2+\mathrm{sh}(\alpha)=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

3. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{ch}(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{sh}(x)=+\infty$ donc par produit et par addition, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{ch}\ x)^2+\mathrm{sh}(x)=+\infty.$$

On a

$$\begin{aligned} f(x)=(\mathrm{ch}\ x)^2+\mathrm{sh}(x) &= \mathrm{ch}(x)\left[\mathrm{ch}(x)+\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\right]=\mathrm{ch}(x)\left[\mathrm{ch}(x)+\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right] \\ &= \mathrm{ch}(x)\left[\mathrm{ch}(x)+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right]. \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{ch}(x)+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=+\infty$. Il s'ensuit

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{ch}(x)\left[\mathrm{ch}(x)+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right]=+\infty.$$

4. Les fonctions ch et sh étant dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en que produit et somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel x, on a

$$f'(x)=2\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}'(x)+\mathrm{sh}'(x)=2\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)+\mathrm{ch}(x)=(1+2\mathrm{sh}(x))\mathrm{ch}(x).$$

En utilisant les résultats des questions 1, on a alors

$$\begin{aligned} f'(x)\leqslant 0 &\Leftrightarrow 1+2\mathrm{sh}(x)\leqslant 0 \text{ car } \mathrm{ch}(x)\geqslant 1>0 \\ &\Leftrightarrow x\leqslant\alpha \text{ car } x\mapsto 1+2\mathrm{sh}(x) \text{ est croissante.} \end{aligned}$$

De plus, en utilisant les résultats des questions 2 et 3, on obtient alors le tableau de variation ci-dessous.

	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. La fonction f est décroissante sur $]-\infty,\alpha]$ donc

$$\forall x \in]-\infty,\alpha],\ \text{ on a } f(x) \geqslant f(\alpha) = \frac{3}{4} > 0.$$

De plus, la fonction f est croissante sur $[\alpha,+\infty[$, on a

$$\forall x \in [\alpha,+\infty[,\ \text{ on a } f(x) \geqslant f(\alpha) = \frac{3}{4} > 0.$$

Ainsi, pour tout réel x, on a bien $f(x) > 0$.

Partie 2

1. Les fonctions sh, exp, et $x \mapsto -x-1$ étant dérivables, la fonction g est dérivable en tant que composée et somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel x, on a

$$g'(x) = \text{sh}'(x)e^{\text{sh}\ x} - 1 = \text{ch}(x)e^{\text{sh}\ x} - 1.$$

2. Les fonctions ch, exp, et sh étant dérivables, la fonction g' est dérivable en tant que composée , produit et somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel x, on a

$$g''(x) = \text{ch}'(x)e^{\text{sh}\ x} + \text{ch}(x)\text{sh}'(x)e^{\text{sh}\ x} = (\text{sh}(x) + \text{ch}^2(x)))e^{\text{sh}\ x} = f(x)e^{\text{sh}\ x}.$$

3. On a montré dans la question 5 de la partie 1 que f était à valeurs strictement positives. Par conséquent, l'expression de g'' obtenue dans la question précédente montre que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g''(x) > 0.$$

On en déduit que g' est une fonction croissante. De plus, on a $g'(0) = 0$ donc g' est négative sur $]-\infty,0]$ et positive sur $[0,+\infty[$ de quoi l'on déduit que g est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, d'une part, la fonction g étant décroissante sur $]-\infty,0]$, il vient

$$\forall x \in]-\infty,0],\ \text{ on a } g(x) \geqslant g(0) = 0.$$

D'autre part, la fonction g étant croissante sur $[0,+\infty[$, il vient

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \text{ on a } g(x) \geqslant g(0) = 0.$$

Ainsi, pour tout réel x, on a bien $g(x) \geqslant 0$.

4. Soit $x \in [0,1[$, on vient d'établir $g(x) \geqslant 0$. En reprenant la définition de g, on a donc

$$e^{\text{sh}\ x} - x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 + x \leqslant e^{\text{sh}\ x}. \tag{1}$$

Par ailleurs, en appliquant cette même inégalité à $-x$, on obtient

$$1 - x \leqslant e^{\operatorname{sh}(-x)} = e^{-\operatorname{sh} x} = \frac{1}{e^{\operatorname{sh} x}}.$$

Or $x < 1$ donc $1 - x > 0$. La fonction inverse étant décroissante sur $]0, +\infty[$, il vient

$$e^{\operatorname{sh} x} \leqslant \frac{1}{1-x}. \tag{2}$$

En combinant les deux inégalités (1) et (2), on a

$$1 + x \leqslant e^{\operatorname{sh} x} \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

Partie 3

1. On a $k \geqslant n \geqslant 2$ donc $0 \leqslant \frac{1}{k} < 1$. En appliquant à $\frac{1}{k}$ la double inégalité obtenue lors de la question 4 de la partie 2, il vient

$$\frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} \leqslant e^{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} = \frac{k}{k-1}.$$

2. On a

$$e^{S_n} = e^{\sum\limits_{k=n}^{np} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)} = \prod_{k=n}^{np} e^{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)}.$$

Or, pour tout entier $k \in [\![n, np]\!]$, on a montré lors de la question précédente

$$\frac{k+1}{k} \leqslant e^{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)} \leqslant \frac{k}{k-1}.$$

Il s'ensuit

$$\prod_{k=n}^{np} \frac{k+1}{k} \leqslant e^{S_n} \leqslant \prod_{k=n}^{np} \frac{k}{k-1}.$$

Les produits ci-dessus sont des produits télescopiques qui se simplifient sous la forme

$$\prod_{k=n}^{np} \frac{k+1}{k} = \frac{np+1}{n} \leqslant e^{S_n} \leqslant \prod_{k=n}^{np} \frac{k}{k-1} = \frac{np}{n-1}.$$

3. En composant par la fonction ln qui est croissante, l'inégalité obtenue lors de la question précédente donne

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leqslant S_n \leqslant \ln\left(\frac{np}{n-1}\right).$$

Or, on a d'une part

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \ln\left(p + \frac{1}{n}\right) = \ln p$$

et d'autre part

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{np}{n-1}\right) = \lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{p}{1 - \frac{1}{n}}\right) = \ln p.$$

Grâce au théorème des gendarmes, on obtient ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln p.$$

Problème 2 :

Partie 1 Préliminaires sur les nombres réels

1. Soient $x_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q}$ et $x_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$ avec p_1, q_1, p_2, q_2 entiers. On peut écrire

$$x_1 + x_2 = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$$

où $p_1 q_2 + p_2 q_1 \in Z$ et $q_1 q_2 \in \mathbb{Z}^*$. Ainsi, le réel $x_1 + x_2$ est un rationnel.

2. Soient $x_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q}$ et $x_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$ avec p_1, q_1, p_2, q_2 entiers. On peut écrire

$$x_1 x_2 = \frac{p_1}{q_1}\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$$

où $p_1 p_2 \in Z$ et $q_1 q_2 \in \mathbb{Z}^*$. Ainsi, le réel $x_1 x_2$ est un rationnel.

3. On raisonne par l'absurde. Soient $x_1 \in \mathbb{Q}$ et $x_2 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Supposons $x_1 x_2 \in \mathbb{Q}$. On a $(x_1, x_1 x_2) \in \mathbb{Q}^2$ donc il existe $(p, p_1) \in \mathbb{Z}^2$ et $(q, q_1) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1} \text{ et } x_1 x_2 = \frac{p}{q}. \text{ Donc } x_2 = \frac{p}{q}\frac{q_1}{p_1} = \frac{p q_1}{q p_1} \in \mathbb{Q}.$$

Ce qui est absurde car x_2 est supposé irrationnel. Donc $x_1 x_2$ est irrationnel.

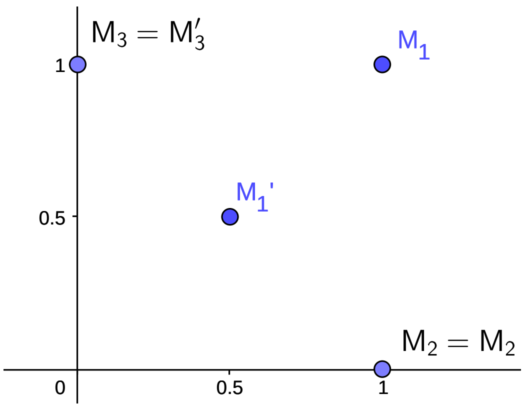
Partie 2 Inversion

Dans toute la suite du problème, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par

$$f : z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}.$$

On identifie f à la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = f(z) = \frac{1}{\overline{z}}$. On notera $M(z)$ un point du plan d'affixe z.

1. On $z_1' = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{|1-i|^2} = \frac{1+i}{2}$, $z_2' = \frac{1}{1} = 1$ et $z_3' = \frac{1}{-i} = i$. On obtient la représentation :



2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{\overline{z}}\right| = \frac{1}{|\overline{z}|} = \frac{1}{|z|} \quad \text{et } \arg(f(z)) = \arg\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) \equiv -\arg(\overline{z}) \equiv \arg z[2\pi].$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a $z \neq 0$ donc $\overline{z} \neq 0$ puis $f(z) = \frac{1}{\overline{z}}$ existe et est non nul. On a alors
$$f(f(z)) = \frac{1}{\overline{f(z)}} = \frac{1}{\overline{\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{(\overline{z})}}} = \frac{1}{\frac{1}{z}} = z.$$
On vient de prouver, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, que $f \circ f(z) = z$. On note également $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$ et on dit que f est une involution.

4. Si $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ avec a et b réels. On a
$$f(z) = \frac{1}{a - ib} = \frac{a + ib}{|a - ib|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Partie 3 Image d'un cercle, d'une droite

1. On écrit :
$$\begin{aligned} M(z) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow |z - z_0| = r \Leftrightarrow |z - z_0|^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (z - z_0)(\overline{z - z_0}) = r^2 \\ &\Leftrightarrow (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = r^2 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - z\overline{z_0} - z_0\overline{z} + z_0\overline{z_0} = r^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - z_0\overline{z} - \overline{z_0}z + |z_0|^2 = r^2. \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, si $M(z)$ appartient à $\mathcal{C}$ avec $z \neq 0$ alors :
$$\begin{aligned} |z|^2 - z_0\overline{z} - \overline{z_0}z + |z_0|^2 = r^2 &\Leftrightarrow |z|^2\left(1 - z_0\frac{\overline{z}}{|z|^2} - \overline{z_0}\frac{z}{|z|^2} + \frac{|z_0|^2}{|z|^2}\right) = r^2 \\ &\Leftrightarrow 1 - z_0\frac{1}{z} - \overline{z_0}\frac{1}{\overline{z}} + |z_0|^2\left|\frac{1}{\overline{z}}\right|^2 = r^2\left|\frac{1}{\overline{z}}\right|^2 \\ &\Leftrightarrow 1 - z_0\overline{z'} - \overline{z_0}z' + |z_0|^2\left|z'\right|^2 = r^2\left|z'\right|^2 \\ &\Leftrightarrow (r^2 - |z_0|^2)|z'|^2 + \overline{z_0}z' + z_0\overline{z'} = 1. \end{aligned}$$

3. Soit $M(z) \in \mathcal{E}$. On a donc $(r^2 - |z_0|^2)|z|^2 + \overline{z_0}z + z_0\overline{z} = 1$. Puisque $f(f(z)) = z$, ie $f(z') = z$, on sait que le point $M'(z')$ est envoyé par f sur le point $M(z)$. Il nous reste à vérifier que $M(z')$ appartient à $\mathcal{C}$. On sait
$$\begin{aligned} |z'|^2 - z_0\overline{z'} - \overline{z_0}z' + |z_0|^2 = r^2 &\Leftrightarrow (r^2 - |z_0|^2)|z''|^2 + \overline{z_0}z'' + z_0\overline{z''} = 1 \quad \text{(question précédente)} \\ &\Leftrightarrow (r^2 - |z_0|^2)|z|^2 + \overline{z_0}z + z_0\overline{z} = 1 \quad \text{car } z'' = f(z') = z. \end{aligned}$$
Cette dernière égalité étant vraie ($M(z) \in \mathcal{E}$), la première l'est également (ie $M'(z') \in \mathcal{C}$). Par conséquent, tout point M de $\mathcal{E}$ peut être vu comme l'image d'un point de $\mathcal{C}$ par la transformation f.

4. a) Puisque le cercle $\mathcal{C}$ ne contient pas l'origine O, on a $|z_0| \neq r$ ce qui justifie $r^2 - |z_0|^2 \neq 0$. Par conséquent
$$\begin{aligned} M(z) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow (r^2 - |z_0|^2)|z|^2 + \overline{z_0}z + z_0\overline{z} = 1 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + \frac{\overline{z_0}}{r^2 - |z_0|^2}z + \frac{z_0}{r^2 - |z_0|^2}\overline{z} = \frac{1}{r^2 - |z_0|^2} \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - \overline{\left(\frac{-z_0}{r^2 - |z_0|^2}\right)}z - \frac{-z_0}{r^2 - |z_0|^2}\overline{z} = \frac{1}{r^2 - |z_0|^2} \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - \overline{\left(\frac{-z_0}{r^2 - |z_0|^2}\right)}z - \frac{-z_0}{r^2 - |z_0|^2}\overline{z} + \left|\frac{-z_0}{r^2 - |z_0|^2}\right|^2 = \left(\frac{r}{r^2 - |z_0|^2}\right)^2. \end{aligned}$$

En posant $Z_0 = \frac{-z_0}{r^2-|z_0|^2}$ et $R = \frac{r}{|r^2-|z_0|^2|}$, la relation précédente se réécrit

$$\begin{aligned} M(z) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow |z|^2 - Z_0\overline{z} - \overline{Z_0}z + |Z_0|^2 = Z^2 \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de centre d'affixe } Z_0 \text{ et de rayon } R. \end{aligned}$$

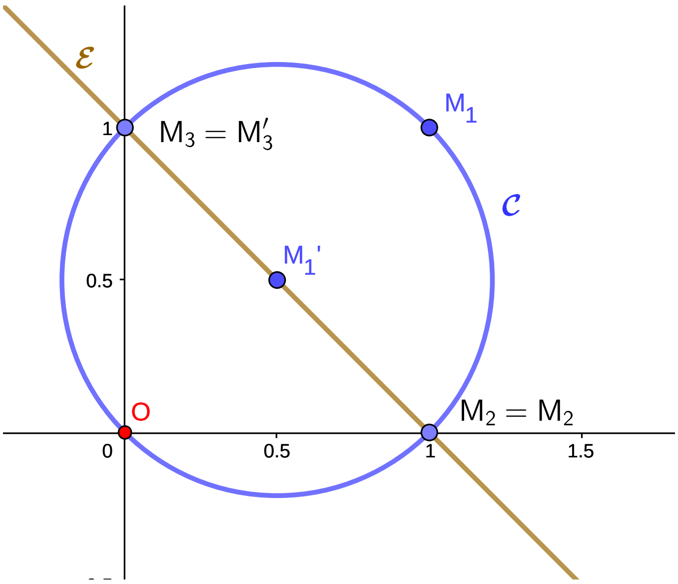
L'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de centre le point d'affixe $Z_0 = \frac{-z_0}{r^2-|z_0|^2}$ et de rayon $R = \frac{r}{|r^2-|z_0|^2|}$.

b) Le cercle $\mathcal{C}$ contient l'origine O donc $r^2 - |z_0|^2 \neq 0$. On écrit $z = x + iy$ et $z_0 = a + ib$ avec a, b, x et y réels. Par conséquent

$$\begin{aligned} M(z) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow \overline{z_0}z + z_0\overline{z} = 1 \\ &\Leftrightarrow (a - ib)(x + iy) + (a + ib)(x - iy) = 1 \\ &\Leftrightarrow ax + by = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ correspond à la droite du plan dont une équation cartésienne est $ax + by = \frac{1}{2}$, donc une droite ne passant pas par l'origine.

c) Le cercle $\mathcal{C}$ considéré ici contient l'origine. La question précédente affirme que l'ensemble $\mathcal{E}$ correspondant est une droite. Puisque M_1, M_2, M_3 appartiennent à $\mathcal{C}$, les points M_1', M_2', M_3' appartiennent à la droite $\mathcal{E}$. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{E}$ est la droite $(M1'M_2')$.
Remarque : Les points M_1', M_2', M_3' sont alignés...



5. Une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas l'origine admet une équation cartésienne de la forme $ax + by = \frac{1}{2}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, de telle sorte que, en posant $z_0 = a + ib$, on a

$$\begin{aligned} M(z) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overline{z_0}z + z_0\overline{z} = 1 \\ &\Leftrightarrow M(z) \text{ appartient à l'image du cercle de centre d'affixe } z_0 \text{ et passant par l'origine.} \end{aligned}$$

En notant $\mathcal{C}$ ce cercle et en notant $f(\mathcal{D})$ l'image de $\mathcal{D}$ par f, on a

$$f(\mathcal{D}) = \{f(z),\ z \in \mathcal{D}\} = \{f(f(z'),\ z' \in \mathcal{C}\backslash\{O\}\} = \{z',\ z' \in \mathcal{C}\backslash\{O\}\} = \mathcal{C}\backslash\{O\}.$$

Partie 4 Points rationnels

1. a) ◇ La droite horizontale $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = \sqrt{2}$ n'admet aucun point rationnel puisque tous les points de cette droite ont une ordonnée irrationnelle (qui est $\sqrt{2}$).
   ◇ La droite d'équation $y = x$ contient tous les points de coordonnées (n, n) avec $n \in \mathbb{Z}$. Elle contient donc une infinité de points rationnels.
   ◇ La droite d'équation $y = \sqrt{2}x$ contient l'origine donc admet au moins un point rationnel. On montre que c'est le seul. Soit $M(x, x\sqrt{2})$ un point de cette droite avec $x \neq 0$.
   - Si x est irrationnel alors M n'est pas un point rationnel.
   - Si x est rationnel non nul alors $x\sqrt{2}$ est irrationnel (question 3 de la partie 1). Ainsi M n'est pas non plus un point rationnel.

   b) Soit $\mathcal{D}$ une droite qui comporte deux points rationnels $A(z_A)$ et $B(z_B)$ distincts. Un point M obtenu par translation du point A de vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$ appartient à $\mathcal{D}$. L'affixe de ce point M est $z_A + \lambda(z_B - z_A)$. Les coordonnées de ce point M sont $(x_A + \lambda(x_B - x_A), y_A + \lambda(y_B - y_A))$. En prenant λ rationnel, la somme et le produit de rationnels étant rationnels (partie 1), le point M est un point de $\mathcal{D}$ à coordonnées rationnelles. En prenant une infinité de rationnels λ, on construit une infinité de points rationnels sur $\mathcal{D}$.

   c) Par l'absurde, on suppose que ce cercle, dont une équation cartésienne est $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$, admet un point rationnel. Ainsi, il existe $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $a^2 + b^2 = \sqrt{2}$. Le produit et la somme de rationnels étant rationnels (partie 1), $\sqrt{2} = a^2 + b^2$ l'est aussi ce qui est absurde. Par conséquent, le cercle de centre O et de rayon $2^{\frac{1}{4}}$ n'admet aucun point rationnel.

2. ◇ Soit M un point du plan à coordonnées rationnelles. On note $z = a + ib$ son affixe avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. D'après le résultat de la question 4 de la partie 2, les coordonnées de M' sont $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}\right)$. Le produit et la somme de rationnels étant rationnels, $a^2 + b^2$ l'est aussi (partie 1). Le quotient de rationnels étant rationnel (non prouvé dans la partie 1), les coordonnées de M' sont rationnelles.
   ◇ Si M' est à coordonnées rationnelles alors M'' est à coordonnées rationnelles d'après le point ci-avant. Puisque $f(f(z)) = z$ pour tout complexe z, on $M'' = M$. Ainsi M est à coordonnées rationnelles.

3. a) ◇ On considère une droite $\mathcal{D}_1$ ne passant pas par l'origine et n'admettant aucun point rationnel (voir question 1a). L'image de $\mathcal{D}_1$ est un cercle $\mathcal{C}_1$ privé de O. Le cercle $\mathcal{C}_1$ contient O qui est un point rationnel mais, en dehors de O, grâce au résultat de la question 2, $\mathcal{C}_1 \setminus \{O\}$ n'admet aucun point rationnel.
   Le cercle $\mathcal{C}_1$ n'admet que l'origine comme point rationnel.
   ◇ On considère la droite $\mathcal{D}_2$ ne passant pas par l'origine d'équation $y = \sqrt{2}x + 1$ qui n'admet comme point rationnel que le point $A(0, 1)$. L'image de $\mathcal{D}_2$ par f est un cercle $\mathcal{C}_2$ privé de l'origine. Le seul point rationnel de $\mathcal{C}_2$ privé de l'origine est A' grâce à la question 2. Par conséquent, le cercle $\mathcal{C}_2$ admet uniquement deux points rationnels A' et O.

   b) Soit $\mathcal{C}$ un cercle passant par l'origine et qui admet au moins deux autres points rationnels A et B. L'image de ce cercle par f est une droite $\mathcal{D} = f(\mathcal{C})$ qui contient A' et B'. Puisque A et B sont à coordonnées rationnelles, A' et B' le sont aussi. Grâce au résultat de la question 1b, la droite $\mathcal{D} = f(\mathcal{C})$ admet une infinité de points rationnels. Grâce au résultat de la réciproque de la question 2, les points du cercle $\mathcal{C}$ correspondant aux points rationnels sur $\mathcal{D}$ sont des points rationnels sur $\mathcal{C}$. Le cercle $\mathcal{C}$ admet une infinité de points rationnels.