MATHÉMATIQUES

Devoir n°1

Jeudi 22 Septembre 2022

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants dans l'appréciation des copies. **En particulier, il est indispensable de conclure vos réponses et d'encadrer vos résultats à la règle.**

On pourra admettre le résultat d'une question après l'avoir mentionné explicitement sur sa copie.

Questions de cours :

- Donner les limites $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$.
- Donner une expression de $\arctan'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, de $\arcsin'(x)$ pour $x \in]-1,1[$
- Énoncer la formule du binôme de Newton.
- Pour $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Recopier et compléter $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \quad \cdots \quad \Leftrightarrow \quad \cdots \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$

Exercice 1 1. Montrer que, pour tout $y \in [-1,1]$, on a $\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}$.

2. Montrer que, pour tout $\theta \in [0,\pi]$, on a $\arcsin(\cos\theta) = \dfrac{\pi}{2} - \theta$.
3. On souhaite montrer que, pour tout réel $x \in [0,1]$, on a

$$\arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1).$$

   a) Soit $x \in [0,1]$. Justifier qu'il existe $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = \sin^2(u)$.

   b) Établir la relation demandée.

Problème 1 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier n strictement positif, on note

$$S_n = \sum_{k=n}^{np} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right) = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) + \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \mathrm{sh}\left(\frac{1}{np}\right).$$

Ce problème a pour but d'étudier la limite éventuelle de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Partie 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (\mathrm{ch}\ x)^2 + \mathrm{sh}\ x \end{cases}$.

1. Résoudre l'équation $2\mathrm{sh}(x) + 1 = 0$. On notera α son unique solution que l'on exprimera simplement au moyen de la fonction logarithme népérien.
2. Déterminer une expression simple de $f(\alpha)$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
4. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire que, pour tout réel x, on a $f(x) > 0$.

Partie 2

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\mathrm{sh}\ x} - x - 1 \end{cases}$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout réel x, une expression de $g'(x)$.
2. Justifier que g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout réel x, une expression de $g''(x)$ où g'' désigne la dérivée de g'.
3. En déduire les variations de g' puis celles de g. Justifier alors que pour tout réel x, on a $g(x) \geqslant 0$.
4. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, on a l'inégalité $1 + x \leqslant e^{\mathrm{sh}\ x} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

Partie 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Montrer que, pour tout $k \in [\![n, np]\!]$, on a $\dfrac{k+1}{k} \leqslant e^{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right)} \leqslant \dfrac{k}{k-1}$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, on a
$$\frac{np+1}{n} \leqslant e^{S_n} \leqslant \frac{np}{n-1}.$$
3. En déduire la limite de la suite (S_n).

Problème 2 :

Partie 1 Préliminaires sur les nombres réels

On rappelle qu'un nombre réel x est rationnel s'il existe des entiers relatifs p et q avec q non nul tels que $x = \frac{p}{q}$. Dans tout ce sujet, on pourra librement utiliser que le fait que $\sqrt{2}$, π ou e ne sont pas des nombres rationnels, on dit qu'ils sont irrationnels.

1. Montrer que la somme de nombres rationnels est un nombre rationnel.
2. Montrer que le produit de nombres rationnels est un nombre rationnel.
3. Montrer que le produit d'un rationnel non nul et d'un irrationnel est un nombre irrationnel.

Partie 2 Inversion

Dans toute la suite du problème, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par

$$f : z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}.$$

On identifie f à la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = f(z) = \frac{1}{\overline{z}}$. On notera $M(z)$ un point du plan d'affixe z.

1. Dans le plan géométrique, placer les points $M_1(1+i)$, $M_2(1)$, $M_3(i)$ ainsi que les points M_1', M_2' et M_3'. *On prendra une unité de* 8 *cm ou de* 8 *carreaux.*
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Exprimer le module et un argument du complexe $f(z)$ en fonction de $|z|$ et $\arg(z)$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Justifier que $f(z)$ est non nul et exprimer $f(f(z))$.
4. Si $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ avec a et b réels, donner la forme algébrique de $f(z)$.

Partie 3 Image d'un cercle, d'une droite

1. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre d'affixe z_0 et de rayon r. Montrer que pour tout point M d'affixe z, on a la caractérisation suivante.
$$M(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z|^2 - z_0\overline{z} - \overline{z_0}z + |z_0|^2 = r^2$$
2. Montrer que si $M(z)$ appartient à $\mathcal{C}$ avec $z \neq 0$ alors l'affixe z' du point M' vérifie
$$(r^2 - |z_0|^2)|z'|^2 + \overline{z_0}z' + z_0\overline{z'} = 1.$$
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points du plan dont les affixes z vérifient la relation précédente $(r^2 - |z_0|^2)|z|^2 + \overline{z_0}z + z_0\overline{z} = 1$.
3. Réciproquement, montrer que si un point du plan M d'affixe z appartient à $\mathcal{E}$ alors M peut être vu comme l'image d'un point de $\mathcal{C}$ par la transformation f.

On vient de justifier que lorsque les points $M(z)$ décrivent le cercle $\mathcal{C}$ (éventuellement privé de l'origine), les points $M'(z')$ décrivent exactement l'ensemble $\mathcal{E}$. On dit que l'image de $\mathcal{C}$ par f est $\mathcal{E}$.

4. a) On suppose dans cette question que le cercle $\mathcal{C}$ ne contient pas l'origine O. Montrer que $\mathcal{E}$ correspond à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   b) On suppose dans cette question que le cercle $\mathcal{C}$ contient l'origine O. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ correspond à une droite.
   c) Pour illustrer le résultat des questions précédentes, compléter la figure de la question 1 (partie 2) en traçant le cercle $\mathcal{C}$ de centre d'affixe $z_0 = \frac{1+i}{2}$ passant par $M_1(1+i)$ et l'ensemble $\mathcal{E}$ correspondant.
5. Montrer que l'image par la transformation f d'une droite ne passant pas par l'origine est un cercle privé de O. *On pourra utiliser le résultat de la question 3 de la partie* 2.

Partie 4 Points rationnels

On dit qu'un point du plan est rationnel si son abscisse et son ordonnée sont des nombres rationnels. Par exemple, les points de coordonnées $\left(\frac{-1}{3}, \frac{4}{5}\right)$ et $\left(2, \frac{4}{7}\right)$ sont rationnels mais le point $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\right)$ n'en n'est pas un (à cause de son abscisse irrationnelle).

1. a) Donner un exemple de droite du plan n'ayant aucun point rationnel, d'une droite admettant une infinité de points rationnels et d'une droite n'ayant qu'un seul point rationnel.
   b) Montrer qu'une droite qui comporte au moins deux points rationnels en admet une infinité.
   c) Montrer que le cercle de centre O et de rayon $2^{\frac{1}{4}}$ n'admet aucun point rationnel.
2. Montrer qu'un point M du plan est à coordonnées rationnelles si et seulement M' est à coordonnées rationnelles.
3. a) Montrer l'existence d'un cercle dont l'unique point rationnel est l'origine. Montrer l'existence d'un cercle admettant exactement deux points rationnels dont l'origine.
   b) On considère un cercle passant par l'origine et qui admet au moins deux autres points rationnels. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une infinité de points rationnels.