CHAPITRE XXVI : GÉNÉRALITÉS SUR LES PROBABILITÉS

Correction

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $[X_n = 0]$, $[X_n = 1]$, $[X_n = 2]$, il vient :

$$\begin{cases} P(X_{n+1}=0) = P_{X_n=0}(X_{n+1}=0)P(X_n=0) + P_{X_n=1}(X_{n+1}=0)P(X_n=1) + P_{X_n=2}(X_{n+1}=0)P(X_n=2) \\ P(X_{n+1}=1) = P_{X_n=0}(X_{n+1}=1)P(X_n=0) + P_{X_n=1}(X_{n+1}=1)P(X_n=1) + P_{X_n=2}(X_{n+1}=1)P(X_n=2) \\ P(X_{n+1}=2) = P_{X_n=0}(X_{n+1}=2)P(X_n=0) + P_{X_n=1}(X_{n+1}=2)P(X_n=1) + P_{X_n=2}(X_{n+1}=2)P(X_n=2) \end{cases}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} P_{X_n=0}(X_{n+1}=0) = P_{X_n=2}(X_{n+1}=0) = P_{X_n=0}(X_{n+1}=2) = P_{X_n=2}(X_{n+1}=2) = 0 \\ \text{et } P_{X_n=0}(X_{n+1}=1) = P_{X_n=2}(X_{n+1}=1) = 1 \end{aligned}$$

et, en notant B_1, B_2, N_1, N_2 les événements tirer une boule blanche dans l'urne 1 (resp. blanche dans l'urne 2, noire dans l'urne 1, noire dans l'urne 2) lors du $n+1$-ième tirage, on peut écrire

$$\begin{aligned} &P_{X_n=1}(X_{n+1}=0) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P(N_2) = \frac{1}{4} \\ &P_{X_n=1}(X_{n+1}=2) = P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P(B_2) = \frac{1}{4} \\ &P_{X_n=1}(X_{n+1}=1) = P((N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap B_2)) = P(N_1 \cap N_2) + P(B_1 \cap B_2) = P(N_1)P(N_2) + P(B_1)P(B_2) \\ &\qquad = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{cases} P(X_{n+1}=0) = 0 \times P(X_n=0) + \frac{1}{4}P(X_n=1) + 0 \times P(X_n=2) \\ P(X_{n+1}=1) = 1 \times P(X_n=0) + \frac{1}{2}P(X_n=1) + 1 \times P(X_n=2) \\ P(X_{n+1}=2) = 0 \times P(X_n=0) + \frac{1}{4}P(X_n=1) + 0 \times P(X_n=2) \end{cases}$$

que l'on réécrit sous la forme

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=0) \\ P(X_{n+1}=1) \\ P(X_{n+1}=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix} = AU_n$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

b) On note $\varphi_A : X \mapsto AX$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Ainsi, si $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi_A)$.
On recherche des vecteurs X tels que $AX = \frac{-1}{2}X$ ou $AX = 0$ ou $AX = X$. On obtient

$$AX = \frac{-1}{2}X \Leftrightarrow \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad AX = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } AX = X \Leftrightarrow \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pose alors $e_{-1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. En revenant à la définition, on vérifie que la famille $\mathcal{B} = (e_{-1/2}, e_0, e_1)$ est libre. La famille $\mathcal{B}$ se retrouve être une famille libre de $\mathbb{R}^3$, de cardinal 3 égal à $\dim \mathbb{R}^3$: c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Par construction, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ Ae_{-1/2} & Ae_0 & Ae_1 \\ |_{\mathcal{B}} & |_{\mathcal{B}} & |_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ -\frac{1}{2}e_{-1/2} & 0 & e_1 \\ |_{\mathcal{B}} & |_{\mathcal{B}} & |_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D.$$

Les matrices A et D représentent le même endomorphisme φ_A dans deux bases différentes : elles sont semblables. On peut alors écrire $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$ où l'on a posé

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice P^{-1} ayant été déterminée en appliquant simultanément les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de P et I_3 pour arriver respectivement à I_3 et P^{-1}.

c) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $U_n = A^n U_0$.
• Pour $n = 0$, on a bien $A^0 U_0 = I_3 U_0 = U_0$.
• On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $U_n = A^n U_0$. En utilisant la relation $U_{n+1} = AU_n$, il vient

$$U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$$

ce qui achève la récurrence.
On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^n = PD^nP^{-1}$.
• Pour $n = 0$, on a bien $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3 = A^0$.
• On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $A^n = PD^nP^{-1}$. En utilisant la relation $A = PDP^{-1}$, il vient

$$A^{n+1} = AA^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

ce qui achève la récurrence.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$U_n = A^nU_0 = PD^nP^{-1}U_0 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 4 - 4\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 1 + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on obtient

$$P(X_n = 0) = \frac{1}{6}\left(1 + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right), \quad P(X_n = 1) = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right), \quad P(X_n = 2) = \frac{1}{6}\left(1 + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right).$$