CHAPITRE XXVI : GÉNÉRALITÉS SUR LES PROBABILITÉS

Correction

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note B_i (resp. N_i) l'événement "tirer une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_i".

a) On recherche $P(N_1 \cap N_2 \cap N_3)$. Grâce à la formule des probabilités composées, on a

$$P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P_{N_1 \cap N_2}(N_3) P_{N_1}(N_2) P(N_1).$$

On a $P(N_1) = \frac{2}{5}$ et, les événements N_1 et N_2 étant indépendants, on a $P_{N_1}(N_2) = P(N_2) = \frac{2}{5}$. Enfin, sachant N_1 et N_2, il y a 4 boules noires et 3 boules blanches dans l'urne 3 avant de procéder au troisième tirage. Ainsi, on a $P_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{4}{7}$. Il s'ensuit

$$P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{4}{7} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{16}{175}.$$

b) Le tirage dans l'urne U_3 dépend des tirages dans les urnes précédentes. On considère alors le système complet d'événements $(B_1 \cap B_2, B_1 \cap N_2, N_1 \cap N_2, N_1 \cap B_2)$ pour appliquer la formule des probabilités totales. On a

$$\begin{aligned}
P(B_3) &= P_{B_1 \cap B_2}(B_3) P(B_1 \cap B_2) + P_{B_1 \cap N_2}(B_3) P(B_1 \cap N_2) + P_{N_1 \cap N_2}(B_3) P(N_1 \cap N_2) + P_{N_1 \cap B_2}(B_3) P(N_1 \cap B_2) \\
&= P_{B_1 \cap B_2}(B_3) P(B_1) P(B_2) + P_{B_1 \cap N_2}(B_3) P(B_1) P(N_2) + P_{N_1 \cap N_2}(B_3) P(N_1) P(N_2) + P_{N_1 \cap B_2}(B_3) P(N_1) P(B_2) \\
&\qquad \text{car les deux premiers tirages sont indépendants,} \\
&= \frac{5}{7} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \\
&= \frac{45 + 24 + 12 + 24}{175} = \frac{105}{175} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

c) On cherche à déterminer $P_{B_3}(B_1 \cap B_2)$. Grâce aux formules de Bayes, on a

$$P_{B_3}(B_1 \cap B_2) = \frac{P_{B_1 \cap B_2}(B_3) P(B_1 \cap B_2)}{P(B_3)}.$$

On a calculé précédemment $P(B_3) = \frac{3}{5}$ et les événements B_1 et B_2 étant indépendants, on obtient

$$P_{B_3}(B_1 \cap B_2) = \frac{P_{B_1 \cap B_2}(B_3) P(B_1 \cap B_2)}{P(B_3)} = \frac{P_{B_1 \cap B_2}(B_3) P(B_1) P(B_2)}{P(B_3)} = \frac{\frac{5}{7} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{7}.$$