CHAPITRE XXVI : GÉNÉRALITÉS SUR LES PROBABILITÉS

Correction

a) On note A l'événement "Ne pas avoir de six lors de k lancers". On a

$$P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

Dès lors, l'événement $\overline{A}$ "Avoir au moins un six lors de k lancers" a pour probabilité

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

On recherche k tel que $P(\overline{A}) \geqslant \frac{1}{2}$, autrement dit

$$P(\overline{A}) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^k \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \ln\frac{5}{6} \leqslant -\ln 2 \Leftrightarrow k \geqslant \frac{\ln 2}{\ln\frac{6}{5}}.$$

Ainsi, pour $k \geqslant 4$, on a $P(\overline{A}) \geqslant \frac{1}{2}$.

b) Lorsque l'on lance deux dés indiscernables, il y a $\binom{6}{2} = 15$ issues possibles composées de deux chiffres distincts et 6 issues correspondant à des doubles. Ainsi, l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés indiscernables possède 21 issues. Cependant, elles ne sont pas équiprobables. En effet, la probabilité d'obtenir un double-six est de $\frac{1}{36}$ (comme pour chaque double) alors que la probabilité d'obtenir un couple $\{1, 2\}$ est $\frac{2}{36}$ (comme pour chacun des 15 couples qui ne sont pas des doubles). On note B l'événement "Ne pas avoir de double-six lors de k lancers". On a

$$P(B) = \left(\frac{35}{36}\right)^k.$$

Dès lors, l'événement $\overline{B}$ "Avoir au moins un double-six lors de k lancers" a pour probabilité

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^k.$$

On recherche k tel que $P(\overline{B}) \geqslant \frac{1}{2}$, autrement dit

$$P(\overline{B}) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^k \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^k \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \ln\frac{35}{36} \leqslant -\ln 2 \Leftrightarrow k \geqslant \frac{\ln 2}{\ln\frac{36}{35}}.$$

Ainsi, pour $k \geqslant 25$, on a $P(\overline{B}) \geqslant \frac{1}{2}$.