

CHAPITRE XXIII : ARITHMÉTIQUE SUR $\mathbb{K}[X]$ ET FRACTIONS RATIONNELLES

Correction

La fraction rationnelle R n'admet que des pôles simples qui sont $0, 1, \dots, n$. Ainsi, R se décompose sous la forme

$$R = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{X-j} \quad \text{avec } a_j \in \mathbb{R}.$$

Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On détermine a_j par la méthode du cache. On obtient

$$a_j = \frac{n!}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (j-k)} = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{j-1} (j-k) \prod_{k=j+1}^n (j-k)} = \frac{n!}{\left(\prod_{i=1}^j i\right) \left(\prod_{\ell=1}^{n-j} (-\ell)\right)} = (-1)^{n-j} \frac{n!}{j!(n-j)!} = (-1)^{n-j} \binom{n}{j}.$$