CHAPITRE XXIII : ARITHMÉTIQUE SUR $\mathbb{K}[X]$ ET FRACTIONS RATIONNELLES

Correction

a) Existence : On calcule $P(-1) = -2$ et $P(0) = 2$. La fonction polynomiale associée à P étant continue avec $P(-1) < 0$ et $P(0) = 2$, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $a \in]-1, 0[$ tel que $P(a) = 0$. Autrement dit, le polynôme P possède une racine réelle a avec $a \in]-1, 0[$.
Unicité : Pour tout réel x, on a $P'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ donc la fonction P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, le réel a est l'unique racine réelle de P.
Multiplicité : On a $P(a) = 0$ et $P'(a) \neq 0$ puisque P' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc a est une racine simple de P, ie $X - a$ divise P mais $(X - a)^2$ ne divise pas P.

b) On sait que $X - a$ divise P qui est un polynôme de degré 3 de coefficient dominant 1. Par conséquent, on peut écrire

$$P(X) = (X - a)(X^2 + bX + c) = X^3 + (b - a)X^2 + (c - ab)X - ac.$$

En identifiant les coefficients de P, il vient

$$\begin{cases} b - a = 0 \\ c - ab = 3 \\ -ac = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ c = 3 + a^2 \\ ac = -2 \end{cases}.$$

On vérifie qu'avec $c = 3 + a^2$, on a $ac = 3a + a^3 = -2$ puisque $a^3 + 3a + 2 = P(a) = 0$. Par conséquent, on a

$$P(X) = (X - a)(X^2 + aX + a^2 + 3). \tag{1}$$

On rappelle que les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont ceux de degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant strictement négatif (ie sans racine réelle). Le polynôme $X^2 + aX + a^2 + 3$ a pour discriminant $a^2 - 4(a^2 + 3) = -3(4 + a^2) < 0$ et est de degré 2, il est donc irréductible sur $\mathbb{R}[X]$. Par conséquent, la factorisation (1) correspond à la factorisation en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ de P.

c) Il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\frac{1}{P} = \frac{\alpha}{X - a} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2 + aX + a^2 + 3}. \tag{2}$$

Le pôle a est simple donc α est donné par $\frac{1}{a^2 + a \times a + a^2 + 3} = \frac{1}{3(a^2+1)}$.
Méthode 1 : On écrit ensuite

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} - \frac{\alpha}{X - a} &= \frac{1}{X - a}\left[\frac{1}{X^2 + aX + a^2 + 3} - \frac{1}{3(a^2 + 1)}\right] = \frac{3(a^2 + 1) - (X^2 + aX + a^2 + 3)}{3(a^2 + 1)(X - a)(X^2 + aX + a^2 + 3)} \\ &= -\frac{X^2 + aX - 2a^2}{3(a^2 + 1)(X - a)(X^2 + aX + a^2 + 3)} = -\frac{X + 2a}{3(a^2 + 1)(X^2 + aX + a^2 + 3)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{3(a^2 + 1)}\left[\frac{1}{X - a} - \frac{X + 2a}{X^2 + aX + a^2 + 3}\right].$$

Méthode 2 : En multipliant par X dans (2) et considérant les fonctions rationnelles associées, il vient

$$\frac{x}{x^3 + 3x + 2} = \frac{\alpha x}{x - a} + \frac{\beta x^2 + \gamma x}{x^2 + ax + a^2 + 3}.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $0 = \alpha + \beta$ donc $\beta = -\alpha$. Pour trouver γ, en spécifiant en $X = 0$ dans (2), on obtient

$$\frac{1}{2} = -\frac{\alpha}{a} + \frac{\gamma}{a^2+3}$$

ce qui, sachant $a^3 + 3a + 2 = 0$, donne

$$\gamma = (a^2+3)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3a(a^2+1)}\right) = \frac{(a^2+3)(3a^3+3a+2)}{6a(a^2+1)} = \frac{a^2(a^2+3)}{3(a^2+1)} = \frac{a(a^3+3a)}{3(a^2+1)} = \frac{-2a}{3(a^2+1)}.$$

Méthode 3 : On trouve β comme dans la méthode 2 ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{P} = \frac{\alpha}{X-a} - \frac{\alpha X}{X^2+aX+a^2+3} + \frac{\gamma}{X^2+aX+a^2+3} = \frac{2\alpha a X + \alpha(a^3+3)}{P} + \frac{\gamma}{X^2+aX+a^2+3}.$$

En multipliant par X^2 et en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $2a\alpha + \gamma = 0$ donc $\gamma = -2a\alpha$. Par conséquent, on a :

$$\frac{1}{P} = \alpha\left[\frac{1}{X-a} - \frac{X+2a}{X^2+aX+a^2+3}\right] \quad \text{avec } \alpha = \frac{1}{3(a^2+1)}.$$