CHAPITRE XXIII : ARITHMÉTIQUE SUR $\mathbb{K}[X]$ ET FRACTIONS RATIONNELLES
Correction

a) $\diamond$ On a d'une part

$$P = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} i^{n+1-k} X^k - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-i)^{n+1-k} X^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (1-(-1)^{n+1-k}) i^{n+1-k} X^k$$
$$= 2i \binom{n+1}{n} X^n + \cdots .$$

On a $\deg P = n$ et le coefficient dominant de P est $2i(n+1)$.
$\diamond$ Soit $a \in \mathbb{C}$. On a :

$$a \text{ est une racine de } P \Leftrightarrow P(a) = 0 \Leftrightarrow (a+i)^{n+1} = (a-1)^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+i}{a-i}\right)^{n+1} = 1 \quad (a - i \neq 0 \text{ sinon } a+i = 0 \text{ ie } a = i \text{ et } a = -i)$$
$$\Leftrightarrow \frac{a+i}{a-i} \in \mathbb{U}_{n+1} \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n]\!], \quad \frac{a+i}{a-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}} \quad (k = 0 \text{ est impossible car il correspond à } a+i = a-i),$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n]\!], \quad a = i\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}+1}{e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}-1} = i\frac{e^{\frac{ik\pi}{n+1}}+e^{\frac{ik\pi}{n+1}}}{e^{\frac{ik\pi}{n+1}}-e^{\frac{ik\pi}{n+1}}} = i\frac{2\cos\frac{k\pi}{n+1}}{2i\sin\frac{k\pi}{n+1}} = \frac{1}{\tan\frac{k\pi}{n+1}}.$$

$\diamond$ On vient d'exhiber n racines de P qui est de degré n : on les a toutes. En n'oubliant pas le coefficient dominant, on peut écrire :

$$P = 2i(n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(X - \frac{1}{\tan\frac{k\pi}{n+1}}\right). \tag{1}$$

b) On a

$$R = \frac{1}{X^2+1} = \frac{1}{(X+i)(X-i)} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i}\right].$$

c) En utilisant la décomposition en éléments simples de R sur $\mathbb{C}$, on peut écrire

$$R^{(n)} = \frac{1}{2i}\left[\left(\frac{1}{X-i}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{X+i}\right)^{(n)}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{(-1)^n n!}{(X-i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(X+i)^{n+1}}\right]$$
$$= \frac{1}{2i}\frac{(-1)^n n!}{(X-i)^{n+1}(X+i)^{n+1}} P = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(X^2+1)^{n+1}} \prod_{k=1}^{n} \left(X - \frac{1}{\tan\frac{k\pi}{n+1}}\right)$$

grâce à la forme factorisée de P obtenue dans la relation (1).