CHAPITRE XXIII : ARITHMÉTIQUE SUR $\mathbb{K}[X]$ ET FRACTIONS RATIONNELLES

Correction

On factorise $X^n - 1$ sous la forme $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k)$ où, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine n-ième de l'unité.
Tous les pôles de R sont simples donc la fraction rationnelle R se décompose en éléments simples sur $\mathbb{C}$ sous la forme

$$R = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - \omega_k} \quad \text{avec } a_k \in \mathbb{C}.$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $(X^n - 1)') = nX^{n-1}$ donc

$$a_k = \frac{n\omega_k}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k^2}{\omega_k^n} = \omega_k^2.$$

Ainsi, on a $\frac{nX}{X^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^2}{X-\omega_k}$.
On rappelle que dans le cas d'un pôle simple ω, le coefficient devant $\frac{1}{X-\omega}$ pour la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ irréductible est donné par $\frac{P(\omega)}{Q'(\omega)}$.